Université de Rennes Semestre printemps 2025-2026

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n^o 3

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\,x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j\in\mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \;=\; \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\xi;x\rangle}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi\in\mathbf{R}^d\,,$$

où $\langle\cdot;\cdot\rangle$ note le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^d$. On notera également $\|\cdot\|$ la norme associée.
De plus,

— pour $k\in\mathbf{N}$, on note $H^k_{\text{pér}}(]a,a+T[)$ l'adhérence des polynômes trigonométriques $T\mathbf{Z}$-périodiques dans $H^k(]a,a+T[)$, et l'on pose

$$H^\infty_{\text{pér}}(]a,a+T[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_{\text{pér}}(]a,a+T[)$$

— pour $k\in\mathbf{N}$, on note $H^k_0(]a,b[)$ l'adhérence dans $H^k(]a,b[)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]a,b[$, et l'on pose

$$H^\infty_0(]a,b[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_0(]a,b[)\,.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\cos(12\pi\,\cdot)$
2. $\sin^2(4\pi\,\cdot)$

Exercise 2. Déterminer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

1. $f_1 :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}$, $x\mapsto \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$
2. $f_2 :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$

où $\mathbf{1}_E$ note la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Exercise 3. Calculer les intégrales suivantes

$$I_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(2,1)} (z+3)^2\,\frac{\mathrm{d}z}{z^2},\quad J_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(0,1)} (z+3)^2\,\frac{\mathrm{d}z}{z^3},\quad K_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(2,1)} \frac{(z+3)^2\,\mathrm{d}z}{(z-2)^2},$$

où les bords sont orientés dans le sens direct et, pour tout $(a,r)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R}_+$, $D(a,r)$ note le disque ouvert complexe centré en a et de rayon r.

Exercise 4. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note δ_a la masse de Dirac en a vue comme distribution sur $\mathbf{R}$.

1. Trouver $f \in L^1(\mathbf{R})$ telle que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\frac{j}{n}}$ converge vers f au sens des distributions lorsque $n \to \infty$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0_c(\mathbf{R})$ supportée dans $[0,1]$.
   Montrer que l'on peut choisir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(\alpha_{j,n})_{0\leq j\leq n-1} \in \mathbf{R}^n$ de sorte que $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j,n}\delta_{\frac{j}{n}}$ converge vers f au sens des distributions lorsque $n \to \infty$.

Exercise 5. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, on considère

$$f_{a,b} \,:\,]a,b[\to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto |x|\,.$$

1. Déterminer en fonction de (a,b) le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b} \in H^k_{\text{pér}}(]a,b[)$.
2. Déterminer en fonction de (a,b) le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b} \in H^k_0(]a,b[)$.

Exercise 6.

1. Donner une forme bilinéaire continue $B \,:\, H^2(]0,1[) \times H^2(]0,1[) \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $u \in H^2(]0,1[)$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(]0,1[)$
   $$B(u,\varphi) \;=\; \langle u + u''''; \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\,.$$
2. En déduire que pour tout $f \in H^{-2}(]0,1[)$, il existe un unique $u \in H^2_0(]0,1[)$ tel que $u + u'''' = f$. On notera dorénavant $u := R_0(f)$.
3. Montrer que si $f \in L^2(]0,1[)$, alors $R_0(f) \in H^4(]0,1[)$.
4. On note $\ell_{0,0}$, $\ell_{0,1}$, $\ell_{1,0}$ et $\ell_{1,1}$ les formes linéaires continues sur $H^2(]0,1[)$ définies par, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$,
   $$\ell_{0,0}(\varphi) = \varphi(0)\,, \qquad \ell_{0,1}(\varphi) = \varphi'(0)\,, \qquad \ell_{1,0}(\varphi) = \varphi(1)\,, \qquad \ell_{1,1}(\varphi) = \varphi'(1)\,.$$
   Montrer que pour toute forme linéaire continue ℓ sur $H^2(]0,1[)$ il existe des uniques $u_0 \in H^2_0(]0,1[)$ et $(\gamma_{0,0},\gamma_{0,1},\gamma_{1,0},\gamma_{1,1}) \in \mathbf{R}^4$ tels que
   $$\ell \;=\; B(u_0,\cdot) + \gamma_{0,0}\ell_{0,0} + \gamma_{0,1}\ell_{0,1} + \gamma_{1,0}\ell_{1,0} + \gamma_{1,1}\ell_{1,1}\,.$$
5. En déduire que, pour tout $f \in L^2(]0,1[)$ et tout $(\zeta_{0,0},\zeta_{0,1},\zeta_{1,0},\zeta_{1,1}) \in \mathbf{R}^4$, il existe un unique $u \in H^4(]0,1[)$ tel que
   $$u + u'''' = f\,, \quad \ell_{0,0}(u'') = \zeta_{0,0}\,, \quad \ell_{0,1}(u'') = \zeta_{0,1}\,, \quad \ell_{1,0}(u'') = \zeta_{1,0}\,, \quad \ell_{1,1}(u'') = \zeta_{1,1}\,.$$

Exercise 7. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Dans ce qui suit, on note $\| \cdot \|_\infty$ la norme ℓ^∞ sur $\mathbf{R}^d$.

1. (a) Montrer que l'on définit une application linéaire continue $\mathbb{S} : \ell^1(\mathbf{Z}^d) \to \mathcal{C}^0_{\text{pér},\mathbf{Z}^d}(\mathbf{R}^d)$ par, pour tout $\mathbf{c} = (c_j)_{j\in\mathbf{Z}^d}$, et tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$\mathbb{S}(\mathbf{c})(x) := \sum_{j\in\mathbf{Z}^d} c_j \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\langle j;x\rangle}$$

   où $\mathcal{C}^0_{\text{pér},\mathbf{Z}^d}(\mathbf{R}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}^d$ admettant tout élément de $\mathbf{Z}^d$ comme période, muni de la norme L^∞.

   (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, si $\mathbf{c} \in \ell^1(\mathbf{Z}^d)$ est tel que $(\|j\|_\infty^k \, c_j)_{j\in\mathbf{Z}^d} \in \ell^1(\mathbf{Z}^d)$, alors $u := \mathbb{S}(\mathbf{c})$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^d$ de longueur $|\alpha| \leq k$, l'on a $\partial^\alpha u = \mathbb{S}(((2\mathrm{i}\pi)^{|\alpha|} j^\alpha \, c_j)_{j\in\mathbf{Z}^d})$.

2. (a) Montrer que l'on définit une application linéaire continue $\mathbb{C} : L^1([0,1]^d) \to \ell^\infty(\mathbf{Z}^d)$ par, pour tout $u \in L^1([0,1]^d)$, et tout $j \in \mathbf{Z}^d$,

$$\mathbb{C}(u)_j \ := \int_{[0,1]^d} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\,\langle j;x\rangle} \, u(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{c} \in \ell^1(\mathbf{Z}^d)$, l'on a $\mathbb{C}(\mathbb{S}(\mathbf{c})_{|[0,1]^d}) = \mathbf{c}$.

3. (a) Montrer qu'existent $0 < K_0 < K_1$ tels que pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, le cardinal de

$$J_r := \left\{ j \in \mathbf{Z}^d \, ; \, \|j\|_\infty = r \right\}$$

   vérifie

$$K_0 r^{d-1} \leq \operatorname{Card}(J_r) \leq K_1 r^{d-1} \, .$$

   (b) En déduire que pour tout $s \in \mathbf{R}^+$ et $1 \leq p \leq \infty$ tels que $s > d/p$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}^d}$

$$\|\mathbf{c}\|_{\ell^1(\mathbf{Z}^d)} \ \leq \ C \, \|((1 + \|j\|_\infty)^s \, c_j)_{j\in\mathbf{Z}^d}\|_{\ell^{p'}(\mathbf{Z}^d)}$$

   où p' est l'indice dual de Lebesgue de p, $1/p + 1/p' = 1$.