Université de Rennes Semestre printemps 2024-2025

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n° 3

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\, x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j \in \mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \;=\; \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi \in \mathbf{R}^d\,.$$

De plus,

— pour $k \in \mathbf{N}$, on note $H^k_{\text{pér}}(]a, a+T[)$ l'adhérence des polynômes trigonométriques $T\mathbf{Z}$-périodiques dans $H^k(]a, a+T[)$, et l'on pose

$$H^\infty_{\text{pér}}(]a, a+T[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_{\text{pér}}(]a, a+T[)$$

— pour $k \in \mathbf{N}$, on note $H^k_0(]a, b[)$ l'adhérence dans $H^k(]a, b[)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]a, b[$, et l'on pose

$$H^\infty_0(]a, b[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_0(]a, b[)\,.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\sin(8\pi\,\cdot)$
2. $\cos^3(2\pi\,\cdot)$
3. $\cos^2(2\pi\,\cdot)\sin^2(2\pi\,\cdot)$

Exercise 2. Calculer en fonction de $n \in \mathbf{Z}$ les intégrales suivantes

$$I_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(0,1)} \exp(z)\, z^n\,\mathrm{d}z\,, \quad J_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(2,1)} \exp(z)\, z^n\,\mathrm{d}z\,, \quad K_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(2,1)} \exp(z)\,(z-2)^n\,\mathrm{d}z\,,$$

où les bords sont orientés dans le sens direct et, pour tout $(a, r) \in \mathbf{C}\times\mathbf{R}_+$, $D(a, r)$ note le disque ouvert complexe centré en a et de rayon r.

Exercise 3. Soit $k \in \mathbf{N}$. On note δ_0 la masse de Dirac en 0 vue comme distribution sur $\mathbf{R}$, et $\delta_0^{(k)}$ sa k-ième dérivée. Soit $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer $(\alpha_0, \cdots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$ tel que

$$a\,\delta_0^{(k)} \;=\; \sum_{\ell=0}^{k} \alpha_\ell\ \delta_0^{(\ell)}\,.$$

Exercise 4. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Pour toute fonction $\chi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ on définit

$$\chi_{\varepsilon,\alpha} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}, \quad x = (x_1, \cdots, x_d) \longmapsto \chi(\varepsilon\, x_1, \varepsilon^\alpha\, x_2, \cdots, \varepsilon^\alpha\, x_d)\,.$$

1. Pour tout $\alpha > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$, déterminer $\beta_{d,\alpha,p} \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $\chi \in L^p(\mathbf{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$,
$$\|\chi_{\varepsilon,\alpha}\|_{L^p} \;=\; \|\chi\|_{L^p}\, \varepsilon^{-\beta_{d,\alpha,p}}\,.$$
2. Montrer que, pour tout $1 < p \leq \infty$, il existe $\alpha_p > 0$ tel que pour tout $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$,
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\partial_{x_1} \chi_{\varepsilon,\alpha_p}\|_{L^p} \;=\; 0\,.$$
3. En déduire que si $u \in L^q(\mathbf{R}^d)$ avec $1 \leq q < \infty$ est tel que $\partial_{x_1} u \in L^1(\mathbf{R}^d)$, alors
$$\int_{\mathbf{R}^d} \partial_{x_1} u \;=\; 0\,.$$

Exercise 5. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, on considère

$$f_{a,b,c,d} \,:\,]-1,1[\to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto a\, x^4 + b\, x^2 + c + d\, \sin(4\pi\, x)\,.$$

1. Déterminer en fonction de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d} \in H^k_{\text{pér}}(]-1,1[)$.
2. Déterminer en fonction de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d} \in H^k_0(]-1,1[)$.

Exercise 6. Soit $a < b$ et $1 \leq p < \infty$. On pose $I =]a, b[$. Soit $f \in L^1(I)$.

1. Montrer que
$$J \,:\, H^1_0(I) \to \mathbf{R}, \qquad u \mapsto \int_I \left(\frac{1}{2}(u')^2 - |u|^p - f\, u \right)$$
est bien définie.
2. Montrer que si $1 \leq p < 2$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in H^1_0(I)$,
$$\int_I |u|^p \;\leq\; \varepsilon \int_I u'^2 + C_\varepsilon\,.$$
On supposera dorénavant $1 \leq p < 2$.
3. Montrer que J est minorée.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in H^1_0(I)^{\mathbf{N}}$ tel que $(J(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\inf J$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée dans $H^1_0(I)$.
   (b) En déduire qu'il existe $u_\infty \in H^1_0(I)$ tel qu'une certaine sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers u_∞ faiblement dans $H^1_0(I)$ et fortement dans tout $L^q(I)$, $1 \leq q \leq \infty$.
   (c) Montrer que $J(u_\infty) = \inf J$.
5. Montrer que si $1 < p < \infty$ et $u_* \in H^1_0(I)$ est tel que $J(u_*) = \inf J$ alors
$$-u_*'' - p\, |u_*|^{p-1}\, \text{sign}\,(u_*) \;=\; f$$
où la fonction signe est définie comme $\text{sign} := \mathbf{1}_{]0,+\infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty,0[}$.

Exercise 7.

1. Déterminer une fonction $\omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$, et presque tout $\xi \in \mathbf{R}^2$
$$\mathcal{F}(-\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^4 u)(\xi) \;=\; \omega(\xi)\, \mathcal{F}(u)(\xi)\,.$$
2. En déduire que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ il existe un unique $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$ tel que $u - \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^4 u = f$.
3. On définit $I := \{(j_1, j_2) \in \mathbf{N}^2\,;\, 0 \leq \frac{j_1}{2} + \frac{j_2}{4} \leq 1\}$.
   (a) Donner le cardinal de I et
$$\max_{(j_1,j_2)\in I} j_1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \max_{(j_1,j_2)\in I} j_2\,.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbf{R}_+^n$ et tout $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$,
$$\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell^{s_\ell} \;\leq \max(\{\, a_1\,;\, \cdots\,;\, a_n\,\})^{\sum_{\ell=1}^{n} s_\ell}\,.$$
   (c) En déduire que pour tout $j \in I$ et tout $a \in \mathbf{R}_+^2$
$$a_1^{j_1}\, a_2^{j_2} \leq \max(\{1; a_1^2; a_2^4\})\,.$$
4. Montrer que pour tout $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$ et tout $j \in I$,
$$\|\partial^j u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \;\leq\; \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \| - \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^4 u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}\,.$$