Contrôle continu n° 3

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\,x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j\in\mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \;=\; \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi\in\mathbf{R}^d\,.$$

De plus,

— pour $k\in\mathbf{N}$, on note $H^k_{\text{pér}}(]a,a+T[)$ l'adhérence des polynômes trigonométriques $T\mathbf{Z}$-périodiques dans $H^k(]a,a+T[)$, et l'on pose

$$H^\infty_{\text{pér}}(]a,a+T[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_{\text{pér}}(]a,a+T[)$$

— pour $k\in\mathbf{N}$, on note $H^k_0(]a,b[)$ l'adhérence dans $H^k(]a,b[)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]a,b[$, et l'on pose

$$H^\infty_0(]a,b[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_0(]a,b[)\,.$$

On utilisera aussi l'identification canonique des fonctions $u\,:\,X\times Y\to Z$, $(t,x)\mapsto u(t,x)$ avec les fonctions $X\to Z^Y$, $t\mapsto u(t,\cdot)$.

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\sin(4\pi\,\cdot)$
2. $\cos(8\pi\,\cdot)$
3. $1+\cos(2\pi\,\cdot)+\sin(8\pi\,\cdot)$
4. $\sin(2\pi\,\cdot)^3+\cos(8\pi\,\cdot)^2$
5. $\sin(2\pi\,\cdot)\,\cos(6\pi\,\cdot)$
6. $\cos(4\pi\,\cdot)\,\sin(2\pi\,\cdot)^2$

Exercise 2. Calculer en fonction de $n\in\mathbf{Z}$ les intégrales suivantes

$$I_n := \int_{\partial D(0,1)} z^n\,\mathrm{d}z\,, \qquad J_n := \int_{\partial D(2,1)} z^n\,\mathrm{d}z\,, \qquad K_n := \int_{\partial D(2,1)} (z-2)^n\,\mathrm{d}z\,,$$

où les bords sont orientés dans le sens direct et, pour tout $(a,r)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R}_+$, $D(a,r)$ note le disque ouvert complexe centré en a et de rayon r.

Exercise 3. Soit $d\in\mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout $f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ mesurable,

$$\|\|\cdot\|\,f\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbf{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}^{\frac12}\,\|\|\cdot\|^2\,f\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}^{\frac12}\,.$$

Exercise 4. On note δ_0 la masse de Dirac en 0 vue comme distribution sur $\mathbf{R}$.

1. Déterminer $a \in \mathbf{R}$ tel que la fonction

$$u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a\,x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   vérifie $u_0''' = \delta_0$.

2. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u''' = \delta_0$.
3. Déterminer toutes les distributions impaires $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u''' = \delta_0$.
4. Déterminer toutes les distributions paires $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u''' = \delta_0$.
5. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de support inclus dans $\mathbf{R}_-$ telles que $u''' = \delta_0$.

Exercise 5. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, on considère

$$f_{a,b,c,d} :]-1, 1[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c + d\,\sin(2\pi\,x)\,.$$

1. Déterminer en fonction de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d} \in H^k_{\text{pér}}(]-1, 1[)$.
2. Déterminer en fonction de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d} \in H^k_0(]-1, 1[)$.

Exercise 6. On définit $E_{pair} : L^1_{loc}(]0, \frac{1}{2}[) \to L^1_{loc}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ par, pour tout $u \in L^1_{loc}(]0, \frac{1}{2}[)$,

$$E_{pair}(u) :]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\to \mathbf{R}\,,\ x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq 0 \\ u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$E^{-1}_{pair}(H^k_{\text{pér}}(]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[)) = \left\{ u \in H^k(]0, \tfrac{1}{2}[)\,;\text{ pour tout } j \in \mathbf{N} \text{ tel que } 2\,j + 1 \leq k - 1, \qquad u^{(2j+1)}(0) = 0 \text{ et } u^{(2j+1)}(\tfrac{1}{2}) = 0 \right\},$$

   où les valeurs en 0 et en $\frac{1}{2}$ sont définies au sens des traces.

2. Soit a, b et c des fonctions continues sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ avec a et c paires et b impaire telles que pour tout $f \in L^2(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$, il existe un unique $u \in H^2_{\text{pér}}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ tel que $-(a\,u')' + b\,u' + c\,u = f$.
   On pose

$$a_0 = a_{|\,]0,\frac{1}{2}[}\,, \qquad b_0 = b_{|\,]0,\frac{1}{2}[}\,, \qquad \text{et} \qquad c_0 = c_{|\,]0,\frac{1}{2}[}\,.$$

   En déduire que pour tout $g \in L^2(]0, \frac{1}{2}[)$, il existe un unique $v \in H^2(]0, \frac{1}{2}[)$ tel qu'au sens des traces $v'(0) = v'(\frac{1}{2}) = 0$ et $-(a_0\,v')' + b_0\,v' + c_0\,v = g$.

Exercise 7. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. On identifie les vecteurs de $\mathbf{R}^{d+1}$ avec les couples de vecteurs $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ et l'on introduit une transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}_x$ telle que pour tout $u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^d))$

$$\mathcal{F}_x(u)(t,\xi) \;=\; \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi\cdot x}\, u(t,x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad (t,\xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d\,.$$

1. Déterminer une fonction $\omega : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{d+1})$, en posant $v = \mathcal{F}_x(u)$ et $f = \mathcal{F}_x(\Delta u)$ l'on ait
$$\partial_t^2 v(t,\xi) \;=\; \omega(\|\xi\|)\, v(t,\xi) + f(t,\xi)\,.$$

2. Calculer pour $\xi \in \mathbf{R}^d$ et $t \in \mathbf{R}$
$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \|\xi\|^2 & 0 \end{pmatrix}\right)\,.$$

3. Déterminer $C_0 > 0$ tel que si $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et
$$u \;=\; \mathcal{F}_x^{-1}\left((t,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{-t\|\xi\|} a(\xi)\right)$$
alors
$$\|u_{|]0,\infty[\times\mathbf{R}^d}\|_{\dot{H}^1(]0,\infty[\times\mathbf{R}^d)} \;=\; C_0\,\|a\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}\,.$$