Corrigé — Contrôle continu n° 2 , 2026

Analyse avancée, M1

Université de Rennes

Exercice 1

On rappelle que pour u fonction $\mathbb{Z}$-périodique, ses coefficients de Fourier sont

$$c_j(u) = \int_0^1 u(x)\, e^{-2i\pi jx}\, \mathrm{d}x, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

et que $c_j(e^{2i\pi m\,\cdot}) = \delta_{j,m}$.

1. On écrit $\sin(4\pi x) = \dfrac{e^{2i\pi(2x)} - e^{-2i\pi(2x)}}{2i}$, d'où par identification :

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{2i}\,, \quad c_{-2} = -\frac{1}{2i}\,, \quad c_j = 0 \text{ pour } j \neq \pm 2.}$$

2. On décompose en exponentielles complexes :

$$u(x) = 2 + \frac{e^{2i\pi x} - e^{-2i\pi x}}{2i} + \frac{e^{2i\pi(4x)} + e^{-2i\pi(4x)}}{2}\,,$$

ce qui donne par lecture directe :

$$\boxed{c_0 = 2, \quad c_1 = \frac{1}{2i}, \quad c_{-1} = -\frac{1}{2i}, \quad c_4 = c_{-4} = \frac{1}{2}, \quad c_j = 0 \text{ sinon.}}$$

3. On linéarise chaque terme séparément.

• $\sin^2(2\pi x) = \dfrac{1 - \cos(4\pi x)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\, e^{2i\pi(2x)} - \dfrac{1}{4}\, e^{-2i\pi(2x)}$.

• Pour le cube, on développe le binôme :

$$\cos^3(4\pi x) = \left(\frac{e^{2i\pi(2x)} + e^{-2i\pi(2x)}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\big(e^{2i\pi(6x)} + 3\, e^{2i\pi(2x)} + 3\, e^{-2i\pi(2x)} + e^{-2i\pi(6x)}\big).$$

En additionnant, les termes en $e^{\pm 2i\pi(2x)}$ se regroupent avec coefficient $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{8}$, d'où

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = c_{-2} = \frac{1}{8}, \quad c_6 = c_{-6} = \frac{1}{8}, \quad c_j = 0 \text{ sinon.}}$$

Exercice 2

On utilise la formule des résidus : pour f méromorphe au voisinage de $\overline{D(a,r)}$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{\substack{z_0 \text{ pôle de } f \\ z_0 \in D(a,r)}} \mathrm{Res}(f, z_0).$$

Calcul de I_n. L'intégrande $f(z) = (z+1)^2 z^n$ a un pôle éventuel en $z = 0$ (pour $n \le -1$), qui est dans $D(0,1)$. On développe :

$$(z+1)^2\, z^n = z^{n+2} + 2\, z^{n+1} + z^n.$$

Le résidu en 0 est le coefficient de z^{-1}, non nul ssi l'un des exposants $n+2$, $n+1$, n vaut -1 :

$$\boxed{I_{-3} = 1, \quad I_{-2} = 2, \quad I_{-1} = 1, \quad I_n = 0 \text{ pour } n \notin \{-3,-2,-1\}.}$$

Calcul de J_n. Le seul pôle éventuel de $(z+1)^2 z^n$ est $z = 0$. Or $|0-2| = 2 > 1$, donc $0 \notin D(2,1)$. L'intégrande est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D(2,1)}$, d'où par Cauchy :

$$\boxed{J_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Calcul de K_n. L'intégrande $(z+1)^2(z-2)^n$ a un pôle éventuel en $z = 2 \in D(2,1)$ (pour $n \le -1$). On pose $w = z - 2$ et l'on écrit $z + 1 = w + 3$:

$$(z+1)^2(z-2)^n = (w+3)^2\, w^n = w^{n+2} + 6\, w^{n+1} + 9\, w^n.$$

Le résidu en $z = 2$ est le coefficient de w^{-1} :

$$\boxed{K_{-3} = 1, \quad K_{-2} = 6, \quad K_{-1} = 9, \quad K_n = 0 \text{ pour } n \notin \{-3,-2,-1\}.}$$

Exercice 3

La fonction $f_\alpha(x) = \cos(4\pi\alpha x)$ est définie sur $]-1,1[$, intervalle de longueur $T = 2$. On identifie f_α à son prolongement 2-périodique.

Cas $\alpha \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$. Alors $4\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\cos(4\pi\alpha x)$ est un polynôme trigonométrique 2-périodique. Donc

$$\boxed{f_\alpha \in H^\infty_{\text{pér}}(\,]-1,1[\,)}.$$

Cas $\alpha \notin \frac{1}{4}\mathbb{Z}$. On applique un théorème du cours qui nous dit que $f_\alpha \in H^k_{\text{pér}}$ si et seulement si $f_\alpha \in H^k$ et que les dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ existent et sont continues (comme fonctions 2-périodiques sur $\mathbb{R}$).

Continuité. Comme f_α est paire,

$$f_\alpha(1^-) = \cos(4\pi\alpha) = \cos(-4\pi\alpha) = f_\alpha(-1^+),$$

donc f_α est continue.

Dérivée première. On calcule les limites aux points de jonction :

$$f'_\alpha(1^-) = -4\pi\alpha\sin(4\pi\alpha), \qquad f'_\alpha(-1^+) = -4\pi\alpha\sin(-4\pi\alpha) = 4\pi\alpha\sin(4\pi\alpha).$$

Le saut vaut $f'_\alpha(-1^+) - f'_\alpha(1^-) = 8\pi\alpha\sin(4\pi\alpha) \neq 0$, car $\alpha \neq 0$ et $4\alpha \notin \mathbb{Z}$. Donc

$$\boxed{f_\alpha \in H^1_{\text{pér}}(\,]-1,1[\,)}.$$

et $k = 1$ est le plus grand entier vérifiant cette propriété.

Remarque: Dans le second cas, on pouvait égalemnt calculer la régularité Sobolev via la décroissance des coeffiicents de Fourier. Une intégration par parties (le terme de bord s'annule grâce à la continuité de $\tilde{f}_\alpha$) donne

$$c_j(f_\alpha) = O\left(\frac{1}{j^2}\right) \quad \text{pour } |j| \to \infty,$$

et cette borne est optimale. On en déduit :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (1+j^2)^k \, |c_j|^2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j\neq 0} \frac{1}{j^{4-2k}} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad 4-2k > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad k < \frac{3}{2}\,.$$

Le plus grand entier vérifiant $k < \frac{3}{2}$ est $k = 1$.

Exercice 4

1. On note $p' = \dfrac{p}{p-1} \in [1,\infty]$ l'exposant conjugué de p. L'idée commune aux trois cas est d'écrire $|u(x)| = |x|^{-\alpha} \cdot |x|^{\alpha} |u(x)|$ et d'appliquer l'inégalité de Hölder.

Cas $\alpha + 1/p < 1$. Sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, Hölder donne :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |u| \leq \||\cdot|^{-\alpha}\|_{L^{p'}([-\varepsilon,\varepsilon])} \, \||\cdot|^{\alpha} u\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

On calcule le premier facteur :

$$\||\cdot|^{-\alpha}\|^{p'}_{L^{p'}([-\varepsilon,\varepsilon])} = 2\int_0^{\varepsilon} x^{-\alpha p'}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\varepsilon^{1-\alpha p'}}{1-\alpha p'}\,,$$

qui converge car $\alpha + \dfrac{1}{p} < 1$ se réécrit $\alpha p' < 1$. On en tire :

$$\||\cdot|^{-\alpha}\|_{L^{p'}([-\varepsilon,\varepsilon])} = C_{\alpha,p}\,\varepsilon^{(1-\alpha p')/p'} = C_{\alpha,p}\,\varepsilon^{1-(\alpha+1/p)},$$

ce qui donne la borne voulue avec $K = K(\alpha, p)$.

Cas $\alpha + 1/p > 1$. Sur $\mathbb{R}\backslash]-R,R[$, la même démarche donne :

$$\int_{|x|>R} |u| \leq \||\cdot|^{-\alpha}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}\backslash]-R,R[)} \, \||\cdot|^{\alpha} u\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

On a cette fois :

$$\||\cdot|^{-\alpha}\|^{p'}_{L^{p'}(\mathbb{R}\backslash]-R,R[)} = 2\int_R^{\infty} x^{-\alpha p'}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,R^{1-\alpha p'}}{\alpha p'-1}\,,$$

convergent car $\alpha p' > 1$. D'où un facteur $R^{(1-\alpha p')/p'} = R^{-(\alpha+1/p-1)}$, comme annoncé.

Cas $\alpha + 1/p = 1$. Alors $\alpha p' = 1$, et sur $[\varepsilon, R]$ (en doublant par symétrie) :

$$\||\cdot|^{-\alpha}\|^{p'}_{L^{p'}([\varepsilon,R])} = 2\int_{\varepsilon}^{R} x^{-1}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right).$$

D'où $\||\cdot|^{-\alpha}\|_{L^{p'}} = C\left(\ln\dfrac{R}{\varepsilon}\right)^{1/p'}$. Or $\dfrac{1}{p'} = 1 - \dfrac{1}{p} = \alpha$, ce qui donne la borne en $\left(\ln\dfrac{R}{\varepsilon}\right)^{\alpha}$.

2. On pose $\varphi(\varepsilon) = A\varepsilon^\eta + B\ln(1/\varepsilon)$ et on cherche son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi'(\varepsilon) = A\eta\,\varepsilon^{\eta-1} - \frac{B}{\varepsilon} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad A\eta\,\varepsilon^\eta = B \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\varepsilon_c = \left(\frac{B}{A\eta}\right)^{1/\eta}.}$$

C'est un minimum car $\varphi(\varepsilon) \to +\infty$ quand $\varepsilon \to 0^+$ et quand $\varepsilon \to +\infty$.

3. On pose $\psi(R) = A\,R^{-\eta} + B\ln R$ et on dérive :

$$\psi'(R) = -\frac{A\eta}{R^{\eta+1}} + \frac{B}{R} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad B\,R^\eta = A\eta \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{R_c = \left(\frac{A\eta}{B}\right)^{1/\eta}.}$$

On observe que $R_c(\eta, A, B) = \dfrac{1}{\varepsilon_c(\eta, A, B)}$.

4. On calcule explicitement :

$$\varepsilon_c\left(\eta,\, A + \frac{B}{\eta},\, B\right) = \left(\frac{B}{\eta A + B}\right)^{1/\eta} \leq 1 \qquad \text{car } B \leq \eta A + B.$$

$$R_c\left(\zeta,\, C + \frac{B}{\zeta},\, B\right) = \left(\frac{\zeta C + B}{B}\right)^{1/\zeta} \geq 1 \qquad \text{car } \zeta C + B \geq B.$$

D'où $\varepsilon_c \leq 1 \leq R_c$.

5. On fixe u mesurable non nul tel que $|\cdot|\,u \in L^\infty(\mathbb{R})$, et l'on pose :

$$A_1 = \||\cdot|^{1/2}u\|_{L^\infty}, \qquad A_2 = \||\cdot|^{3/2}u\|_{L^\infty}, \qquad B_0 = \||\cdot|\,u\|_{L^\infty}.$$

On décompose $\|u\|_{L^1} = \displaystyle\int_{|x|\leq\varepsilon} |u| + \int_{\varepsilon<|x|\leq R} |u| + \int_{|x|>R} |u|$ pour $0 < \varepsilon \leq R$, et l'on applique la question 1 avec $p = \infty$:

$$\begin{aligned}
(\alpha = \tfrac{1}{2},\ p = \infty) \quad &: \quad \int_{|x|\leq\varepsilon} |u| &&\leq\ K\,\varepsilon^{1/2}\,A_1\,, \\
(\alpha = 1,\ p = \infty) \quad &: \quad \int_{\varepsilon<|x|\leq R} |u| &&\leq\ K\,\ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) B_0\,, \\
(\alpha = \tfrac{3}{2},\ p = \infty) \quad &: \quad \int_{|x|>R} |u| &&\leq\ K\,R^{-1/2}\,A_2\,.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\|u\|_{L^1} \leq K\left(A_1\,\varepsilon^{1/2} + B_0\,\ln\frac{R}{\varepsilon} + A_2\,R^{-1/2}\right).$$

On réécrit $\ln\dfrac{R}{\varepsilon} = \ln\dfrac{1}{\varepsilon} + \ln R$ et l'on optimise séparément.

• *En ε :* on minimise $g(\varepsilon) = A_1\,\varepsilon^{1/2} + B_0\ln(1/\varepsilon)$. Par la question 2 avec $\eta = \dfrac{1}{2}$, $A = A_1$, $B = B_0$, on trouve :

$$\varepsilon_c = \left(\frac{B_0}{A_1/2}\right)^2 = \frac{4B_0^2}{A_1^2}\,, \qquad g(\varepsilon_c) = 2B_0 + B_0\ln\frac{A_1^2}{4B_0^2}\,.$$

• *En R :* on minimise $h(R) = A_2\,R^{-1/2} + B_0 \ln R$. Par la question 3 avec $\eta = \dfrac{1}{2}$, $A = A_2$, $B = B_0$, on trouve :

$$R_c = \frac{A_2^2}{4B_0^2}\,, \qquad h(R_c) = 2B_0 + B_0 \ln \frac{A_2^2}{4B_0^2}\,.$$

La question 4 assure $\varepsilon_c \leq R_c$, ce qui valide la décomposition. En sommant :

$$\|u\|_{L^1} \leq K\,B_0\left(4 + \ln \frac{A_1^2 A_2^2}{16\,B_0^4}\right).$$

Enfin, comme $A_i \leq 2A_i + B_0$, on a $A_1^2 A_2^2 \leq (2A_1 + B_0)^2(2A_2 + B_0)^2$. De plus

$$\frac{(2A_1 + B_0)(2A_2 + B_0)}{B_0^2} \geq 1$$

(car $2A_i + B_0 \geq B_0$), ce qui permet d'absorber les constantes additives dans le logarithme :

$$\boxed{\|u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K'\,B_0\left(1 + \ln \frac{(2A_1 + B_0)(2A_2 + B_0)}{B_0^2}\right),}$$

c'est-à-dire l'inégalité annoncée avec $A_1 = \||\cdot|^{1/2}u\|_{L^\infty}$, $A_2 = \||\cdot|^{3/2}u\|_{L^\infty}$, $B_0 = \||\cdot|\,u\|_{L^\infty}$.