Corrigé du CC2 – M1 Maths Fondamentales
Exercices 1 et 2

Exercice 1

Les fonctions proposées sont toutes 1-périodique et leurs coefficients de Fourrier sont donnés par

$$c_j(u) = \int_0^1 e^{-2\pi i j x} u(x)\, dx\,, \quad j \in \mathbf{Z}\,.$$

1. On exprime la fonction dans la base des polynômes trigonométriques :

$$\sin(2\pi x) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i2\pi x} - \mathrm{e}^{-i2\pi x})$$

ce qui donne

$$c_j = \frac{1}{2i}(\delta_{1,j} - \delta_{-1,j})\,.$$

2. De même,

$$\cos(6\pi x) = \frac{1}{2}\left(e^{i6\pi x} + e^{-i6\pi x}\right)$$

donc

$$c_j = \frac{1}{2}(\delta_{3,j} + \delta_{-3,j})$$

3.

$$2 + \sin(4\pi x) + \cos(8\pi x) = 2 + \frac{1}{2i}(e^{i4\pi x} - e^{-i4\pi x}) + \frac{1}{2}(e^{i8\pi x} + e^{-i8\pi x})$$

donc

$$c_j = 2\delta_{0,j} + \frac{1}{2i}(\delta_{2,j} - \delta_{-2,j}) + \frac{1}{2}(\delta_{4,j} + \delta_{-4,j})\,.$$

4.

$$\sin^2(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\frac{\mathrm{e}^{i2\pi x} - \mathrm{e}^{-i2\pi x}}{2i})^2 + (\frac{\mathrm{e}^{i4\pi x} + \mathrm{e}^{-i4\pi x}}{2})^3\,.$$

En développant, on trouve

$$c_j = \frac{1}{2}\delta_{0,j} + \frac{1}{8}(\delta_{2,j} + \delta_{-2,j} + \delta_{6,j} + \delta_{-6,j})\,.$$

5. Ici on peut faire de même, ou bien linéariser directement en utilisant une formule trigo :
$$\cos(2\pi x)\sin(6\pi x) = \frac{1}{2}[\sin(8\pi x) + \sin(4\pi x)] = \frac{1}{4i}(\mathrm{e}^{i8\pi x} - \mathrm{e}^{-i8\pi x} + \mathrm{e}^{i4\pi x} - \mathrm{e}^{-i4\pi x})$$
donc
$$c_j = \frac{1}{4i}(\delta_{2,j} - \delta_{-2,j} + \delta_{4,j} - \delta_{-4,j})\,.$$
6. On développe
$$\cos^2(2\pi x)\cdot\sin^3(2\pi x) = (\frac{\mathrm{e}^{i2\pi x} + \mathrm{e}^{-i2\pi x}}{2})^2(\frac{\mathrm{e}^{i2\pi x} - \mathrm{e}^{-i2\pi x}}{2i})^3$$
et on trouve
$$c_j = \frac{1}{16i}(\delta_{1,j} - \delta_{-1,j}) + \frac{1}{32i}(\delta_{3,j} - \delta_{-3,j}) - \frac{1}{32i}(\delta_{5,j} - \delta_{-5,j})\,.$$

Exercice 2

1. Cette identité découle d'une intégration par parties :
$$\int_{\mathbf{R}} xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} x(f^2)'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} f^2(x)\mathrm{d}x$$
Il n'y a pas de termes de bords car $f \in C^1_c(\mathbf{R})$ par hypothèse. Ainsi, $c = -\frac{1}{2} \in \mathbf{R}^*$ convient.
2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\Big|\int_{\mathbf{R}} xf(x)f'(x)dx\Big| \le \Big(\int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbf{R}} (f'(x))^2 dx\Big)^{1/2}.$$
Le résultat s'obtient en utilisant la formule de Plancherel puis en élevant au carré.

Exercice 3

1. On vérifie facilement que pour $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R})$, $\|u\|_X$ est une quantité positive ou nulle, qui vérifie les propriétés d'homogénéité. En ce qui concerne l'inégalité triangulaire, nous déduisons de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que
$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} w|u+v|^2 &= \int_{\mathbf{R}} w|u|^2 + \int_{\mathbf{R}} w|v|^2 + 2\mathrm{Re}(\int_{\mathbf{R}} wu\overline{v}) \\ &\le \int_{\mathbf{R}} w|u|^2 + \int_{\mathbf{R}} w|v|^2 + 2(\int_{\mathbf{R}} w|u|^2)^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbf{R}} w|v|^2)^{\frac{1}{2}} = \Big((\int_{\mathbf{R}} w|u|^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_{\mathbf{R}} w|v|^2)^{\frac{1}{2}}\Big)^2.\end{aligned}$$
On aurait aussi pu directement remarquer que la norme X est associée à une forme bilinéaire continue positive, ou encore que X s'exprime comme la somme de deux semi-normes.
Dans tous les cas, il reste à vérifier le caractère défini de $\|\cdot\|_X$. Observons que
$$\|u\|_X = 0 \quad \Longrightarrow u' = 0 \quad \text{presque partout.}$$
Cela implique que u s'identifie à une fonction constante (dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$), disons c. Or
$$0 = c\int_{\mathbf{R}} w(x)\mathrm{d}x\,.$$
Nous déduisons alors des hypothèses faites sur la fonction w que $c = 0$.

2. Commençons par justifier que $(\chi u)' = \chi' u + \chi u'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \varphi' \chi u \mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}} (\varphi\chi)' u \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}} \varphi \chi' u \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbf{R}} \varphi \chi u' \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}} \varphi \chi' u \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbf{R}} \varphi(\chi u' + \chi' u)\,.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\chi' = 0$ sur $[-R, R]$. Nous déduisons de ce qui précède et de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\|(\chi u)'\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|\chi u'\|_{L^2(\mathbf{R})} \|u'\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\chi' u\|_{L^2(\mathbf{R}\setminus[-R,R])} \\ &\leq \|\chi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u\|_X + w_0^{-\frac{1}{2}} \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \Big(\int_{\mathbf{R}\setminus -R,R]} w_0 |u|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\chi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u\|_X + w_0^{-\frac{1}{2}} \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \Big(\int_{\mathbf{R}\setminus -R,R]} w |u|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \big(\|\chi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + w_0^{-\frac{1}{2}} \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \big) \|u\|_X\,,\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat souhaité avec $C_\chi := \big(\|\chi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + w_0^{-\frac{1}{2}} \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \big)$.

3. Pour montrer que $H^1(\mathbf{R})$ s'injecte dans X et que cette injection est continue, il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(\mathbf{R})$, on a

$$\|u\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq C \|u\|_X\,.$$

En effet, le contrôle de la norme $\|u'\|_{L^2}$ par $\|u\|_X$ découle directement de la définition de la norme associée à X.
On introduit une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[-R, R]$ et $\mathrm{supp}\chi \subset [-2R, 2R]$. Par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|u\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|\chi u\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|(1-\chi) u\|_{L^2(\mathbf{R})}\,.$$

Puisque $(\chi u)' \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, nous avons

$$\chi u(x) = \int_{-\infty}^{x} (\chi u)'$$

d'où nous déduisons de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\|\chi u\|_{L^\infty} \leq \sqrt{4R} \|(\chi u)'\|_{L^2} \leq \sqrt{4R} C_\chi \|u\|_X\,.$$

Cela permet d'obtenir, d'une part, que

$$\|\chi u\|_{L^2} \leq \sqrt{4R} \|\chi u\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq 4R C_\chi \|u\|_X\,.$$

D'autre part,

$$\|(1-\chi) u\|_{L^2} \leq \sqrt{w_0} \|(1-\chi)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \Big(\int_{\mathbf{R}} w |u|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{w_0} \|(1-\chi)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u\|_X\,,$$

ce qui conclut.

4. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans X. En particulier, $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\mathbf{R})$ qui, par complétude de $H^1(\mathbf{R})$, converge dans $H^1(\mathbf{R})$ vers une limite notée u. En particulier,

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}} |u' - u_n'|^2 = 0\,.$$

Il reste à montrer que $\sqrt{w}u \in L^2(\mathbf{R})$ et que

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}} w|u - u_n|^2 = 0\,.$$

Par ailleurs, on vérifie que la suite $(\sqrt{w}u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbf{R})$, qui converge donc vers une limite notée v dans $L^2(\mathbf{R})$. Il reste à montrer que $v = \sqrt{w}u$ pour conclure. En effet, si on montre que $v = \sqrt{w}u$, alors on obtiendrait que

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}} w|u_n - u|^2 = \lim_n \int_{\mathbf{R}} |\sqrt{w}u_n - \sqrt{w}u|^2 = \int_{\mathbf{R}} |v - \sqrt{w}u|^2 = 0\,.$$

Le fait que $v = \sqrt{w}u$ découle directement de l'existence d'une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que

$$\lim_k u_{n_k}(x) = u(x) \quad \text{et} \quad \lim_k \sqrt{w}u_{n_k}(x) = v(x) \quad p.p.\ x \in \mathbf{R}\,.$$

L'existence d'une telle sous-suite commune aux suites $(u_n)_n$ et $(\sqrt{w}u_n)_n$ pour laquelle il y a convergence simple vers leur limite respective est assurée par la convergence dans $L^2(\mathbf{R})$ de chacune de ces deux suites.

5. Pour montrer la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a probablement besoin de supposer que $w \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, ce que nous allons faire. Fixons $u \in X$. Puisque $X \subset H^1(\mathbf{R})$, la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans $H^1(\mathbf{R})$ nous donne une suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que

$$\lim_n \|u - u_n\|_{H^1} = 0\,.$$

Fixons également $\varepsilon > 0$. Puisque $u \in X$, nous pouvons trouver $R \gg 1$ tel que

$$\|\sqrt{w}u\|_{L^2(\mathbf{R}\setminus[-R,R])} + \|u'\|_{L^2(\mathbf{R}\setminus[-R,R])} + \|u\|_{L^2(\mathbf{R}\setminus[-R,R])} \leq \varepsilon\,.$$

On introduit alors $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[-R, R]$ et $\operatorname{supp}\chi \subset [-2R, 2R]$, de sorte que

$$\|(1-\chi)u\|_{L^2} + \|(1-\chi)u'\|_{L^2} + \|\sqrt{w}(1-\chi)u\|_{L^2} \leq \varepsilon\,.$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de ε, telle que

$$\limsup_n \|u - \chi u_n\|_X \leq C\varepsilon\,, \tag{1}$$

ce qui impliquera la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans X. Montrons (1). D'une part,

$$\|u' - (\chi u_n)'\|_{L^2} \leq \|\chi u' - (\chi u_n)'\|_{L^2} + \|(1-\chi)u'\|_{L^2} \leq \|\chi u' - (\chi u_n)'\|_{L^2} + \varepsilon$$

En utilisant la règle de Leibniz, on obtient

$$\|u' - (\chi u_n)'\|_{L^2} \leq \|\chi u' - \chi u_n'\|_{L^2} + \|\chi' u_n\|_{L^2} + \varepsilon \leq \|\chi'\|_{L^\infty}\|u' - u_n'\|_{L^2} + \|\chi' u_n\|_{L^2} + \varepsilon\,,$$

d'où

$$\limsup_n \|u' - (\chi u_n)'\|_{L^2} \leq \limsup_n \|\chi' u_n\|_{L^2} + \varepsilon\,.$$

Or pour tout n,

$$\begin{aligned}\|\chi' u_n\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|\chi'(u_n - u)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\chi' u\|_{L^2(\mathbf{R})}\\ &\leq \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u-u_n\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u\|_{L^2(\mathbf{R}\setminus[-R,R])}\\ &\leq \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u-u_n\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\limsup_n \|u' - (\chi u_n)'\|_{L^2} \leq (1 + \|\chi'\|_{L^\infty})\varepsilon\,.$$

D'autre part,

$$\|\sqrt{w}(u-\chi u_n)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|\sqrt{w}\chi(u-u_n)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\sqrt{w}(1-\chi)u\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|\sqrt{w}\chi(u-u_n)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \varepsilon\,.$$

Or, puisque $(\chi(u-u_n))' \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, on a

$$\|\chi(u-u_n)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq \sqrt{4R}(\|\chi\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \|\chi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})})\|(u-u_n)\|_{H^1(\mathbf{R})}\,,$$

et on conclut que

$$\limsup_n \|\sqrt{w}\chi(u-u_n)\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0\,,$$

ce qui achève la démonstration :

$$\limsup_n \|\sqrt{w}(u-\chi u_n)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \varepsilon\,.$$

6. Remarquons que X a une structure Hilbertienne pour la forme bilinéaire symétrique

$$B(u,v) = \int_{\mathbf{R}} wuv + \int_{\mathbf{R}} u'v'\,,$$

et que $H^{-1}(\mathbf{R})$ s'injecte continument dans X' (puisque X s'injecte continument dans $H^1(\mathbf{R})$). En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans X, on montre que l'existence et l'unicité d'une solution dans X équivaut à l'existence et à l'unicité d'une solution $u \in X$ au problème

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in X\,.$$

La résolution d'un tel problème découle directement du théorème de Riesz–Fréchet.

7. Notons tout d'abord que $\delta_0 \in H^{-1}(\mathbf{R})$, ce qui assure l'existence d'une unique solution $u \in X$. De plus, on déduit de l'unicité et des symétries de l'équation que u est paire.
Lorsque $x \in \mathbf{R}\setminus[-1,1]$, l'équation s'écrit

$$u - u'' = 0\,.$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ (la propriété de symétrie ayant permis de réduire le nombre de constantes indéterminées) tel que l'unique solution u vérifie : si $x \in \mathbf{R}\setminus[-1,1]$,

$$u(x) = \begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{x} & \text{si } x \leq -1\,,\\ \lambda \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 1\,.\end{cases}$$

Sur $[-1,1]$, on cherche une fonction tente : linéaire sur $[-1,0]$ avec une pente Δ et linéaire sur $[0,1]$ avec une pente $-\Delta$, de sorte à définir une fonction $C^1(\mathbf{R}^*)$ et telle que $2\Delta = -1$. En écrivant ces contraintes, on trouve que λ doit vérifier :

$$\lambda \mathrm{e}^{-1} = \Delta = -\frac{1}{2}\,.$$

On en déduit que pour tout $x \leq -1$,

$$u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x+1}\,,$$

puis on prolonge de façon affine sur $[-1, 0]$ en une fonction $C^1(\mathbf{R}_-^*)$, et on prolonge en une fonction paire sur $\mathbf{R}$. En particulier pour $x \geq 1$,

$$u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x+1}\,.$$

8. Montrer que l'injection j_2 est compacte revient à montrer que pour toute suite de fonctions $(u_n) \in X$ normalisées :

$$\|u_n\|_X = 1 \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

qui converge faiblement vers 0 :

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}} u_n v = 0 \quad \text{pour tout } v \in L^2(\mathbf{R})\,,$$

alors on peut extraire une sous-suite telle que

$$\lim_{n_k} \|u_{n_k}\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0\,.$$

Soit $M \gg 1$. Par hypothèse sur w, il existe $R > 0$ tel que $w(x) > M$ pour presque tout $|x| \geq R$. Soit donc χ (dependente de R) choisie comme précédemment. Pour tout n,

$$\|u_n\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|\chi u_n\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|(1-\chi)u_n\|_{L^2(\mathbf{R})}\,.$$

Par hypothèse, on a pour tout n,

$$\|(1-\chi)u_n\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \frac{1}{M}\|u_n\|_X \leq \frac{1}{M}\,.$$

De plus, on déduit du fait que $\|u_n\|_{H^1} \leq 1$ pour tout n que la suite $(\chi u_n)_n$ vérifie les hypothèse du théorème d'Arzela–Ascoli : on peut donc en extraire une sous-suite qui converge uniformément, et la limite est 0 puisqu'on a supposé que (u_n) converge faiblement vers 0. On a ainsi montré qu'il existe une sous-suite telle que

$$\lim_k \|\chi u_{n_k}\|_{L^2(\mathbf{R})} = 0\,,$$

et donc

$$\limsup_k \|u_{n_k}\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \frac{1}{M}\,.$$

On peut alors conclure par extraction diagonale que 0 est bien une valeur d'adhérence de la suite $(\|u_n\|_{L^2(\mathbf{R})})_n$, ce qui achève la preuve de la compacité de l'injection j_2.