Université de Rennes Semestre printemps 2023-2024

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n° 2 : Correction

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi j}{T}x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j \in \mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi \in \mathbf{R}^d\,.$$

De plus,

— pour $k \in \mathbf{N}$, on note $H^k_{\text{pér}}(]a, a+T[)$ l'adhérence des polynômes trigonométriques $T\mathbf{Z}$-périodiques dans $H^k(]a, a+T[)$, et l'on pose

$$H^\infty_{\text{pér}}(]a, a+T[) = \cap_{k\in\mathbf{N}} H^k_{\text{pér}}(]a, a+T[)$$

— pour $k \in \mathbf{N}$, on note $H^k_0(]a, b[)$ l'adhérence dans $H^k(]a, b[)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]a, b[$, et l'on pose

$$H^\infty_0(]a, b[) = \cap_{k\in\mathbf{N}} H^k_0(]a, b[)\,.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\cos(2\pi\,\cdot)$
2. $\sin(8\pi\,\cdot)$
3. $1 + \cos(4\pi\,\cdot) + \sin(8\pi\,\cdot)$
4. $\cos(2\pi\,\cdot)^2 + \sin(8\pi\,\cdot)^3$
5. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(8\pi\,\cdot)$
6. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(2\pi\,\cdot)^4$

Correction :

Il suffit de décomposer chaque fonction dans la base de Fourier. On peut aussi calculer les coefficients à la main mais c'est plus long. Dans la suite on note c_j pour c_j^1 de la fonction étudiée.

1. On a

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad \cos(2\pi x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2i\pi x} + \mathrm{e}^{-2i\pi x}\right)$$

de sorte que

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin \{-1, 1\}\,,\ c_j = 0.$$

2. On a

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad \sin(8\pi x) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{8i\pi x} - \mathrm{e}^{-8i\pi x}\right)$$

de sorte que

$$c_4 = \frac{1}{2i}\,, \qquad c_{-4} = -\frac{1}{2i} \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin \{-4, 4\}\,,\ c_j = 0.$$

3. On a

$$\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad 1+\cos(4\pi x)+\sin(8\pi x) = 1 + \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\pi x}\big) + \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi x}\big)$$

de sorte que

$$c_0 = 1\,, \qquad c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}\,, \qquad c_4 = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,, \qquad c_{-4} = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin \{-4,-2,0,2,4\}\,,\ c_j = 0.$$

4. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad \cos(2\pi x)^2 + \sin(8\pi x)^3 &= \frac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}\big)^2 - \frac{1}{8i}\big(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi x}\big)^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\pi x} + \frac{3}{8\mathrm{i}}\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi x} - \frac{3}{8\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi x} - \frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{e}^{24\mathrm{i}\pi x} + \frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-24\mathrm{i}\pi x}\end{aligned}$$

de sorte que

$$c_0 = \frac{1}{2}\,, \qquad c_2 = c_{-2} = \frac{1}{4}\,, \qquad c_4 = \frac{3}{8\mathrm{i}}\,, \qquad c_{-4} = -\frac{3}{8\mathrm{i}}\,, \qquad c_{12} = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\,, \qquad c_{-12} = \frac{1}{8\mathrm{i}}$$

et

$$\forall j \notin \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 12\}\,,\ c_j = 0.$$

5. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad \cos(2\pi x)\sin(8\pi x) &= \frac{1}{4i}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}\big)\,\big(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi x}\big) \\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi x} - \frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\pi x} + \frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{10\mathrm{i}\pi x} - \frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-10\mathrm{i}\pi x}\end{aligned}$$

de sorte que

$$c_3 = c_5 = \frac{1}{4\mathrm{i}}\,, \qquad c_{-3} = c_{-5} = -\frac{1}{4\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin \{-5,-3,3,5\}\,,\ c_j = 0.$$

6. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}\,, \quad \cos(2\pi x)\sin(2\pi x)^4 &= \frac{1}{32}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}\big)\,\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}\big)^4 \\ &= \frac{1}{32}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}\big)\,\big(6 - 4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi x} - 4\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\pi x}\big) \\ &= \frac{1}{16}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x} - \frac{3}{32}\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi x} - \frac{3}{32}\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\pi x} + \frac{1}{32}\mathrm{e}^{10\mathrm{i}\pi x} + \frac{1}{32}\mathrm{e}^{-10\mathrm{i}\pi x}\end{aligned}$$

de sorte que

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{16}\,, \qquad c_3 = c_{-3} = -\frac{3}{32}\,, \qquad c_5 = c_{-5} = \frac{1}{32} \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}\,,\ c_j = 0.$$

Exercise 2. Soit (E,μ) un espace mesuré, $\omega : E \to \mathbf{R}_+$ et $f : E \to \mathbf{R}$ mesurables, $(s_0, s_1) \in \mathbf{R}^2$, $(p_0, p_1) \in [1,\infty]^2$ et $\theta \in [0,1]$. On définit $(s_\theta, p_\theta) \in \mathbf{R} \times [1,\infty]$ par

$$s_\theta = s_0\,(1-\theta) + s_1\,\theta\,, \qquad\qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,.$$

Montrer que

$$\|\omega^{s_\theta} f\|_{L^{p_\theta}} \leq \|\omega^{s_0} f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta}\, \|\omega^{s_1} f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\,.$$

Correction :

Notons qu'on a l'identité

$$1 = \frac{(1-\theta)p_\theta}{p_0} + \frac{\theta p_\theta}{p_1}$$

de sorte que par inégalité d'Hölder on a

$$\begin{aligned}\int_E |\omega^{s_\theta} f|^{p_\theta}\, d\mu &= \int_E |\omega^{s_0} f|^{(1-\theta)p_\theta} |\omega^{s_1} f|^{\theta p_\theta}\, d\mu \\ &\leq \left(\int_E |\omega^{s_0} f|^{p_0}\right)^{\frac{(1-\theta)p_0}{p_\theta}} \left(\int_E |\omega^{s_1} f|^{p_1}\, d\mu\right)^{\frac{\theta}{p_1} p_\theta} = \left(\|\omega^{s_0} f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \|\omega^{s_1} f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\right)^{p_\theta}.\end{aligned}$$

Exercise 3. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, on considère

$$f_{a,b,c,d} :]0,1[\to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c + d\,\cos(2\pi\,x)\,.$$

1. Déterminer en fonction de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d} \in H^k_{\text{pér}}(]0,1[)$.
2. Déterminer en fonction de $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ le plus grand $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d} \in H^k_0(]0,1[)$.

Correction :

1. On a la caractérisation suivante :

$$u \in H^k_{\text{pér}}(]0,1[) \quad \text{si et seulement si} \quad u \in H^k(]0,1[) \text{ et } \forall j \leq k-1\,,\; u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1).$$

   Comme pour toutes valeurs de a, b, c, d, $f_{a,b,c,d}$ est une fonction lisse, il suffit de vérifier la condition de périodicité. Comme $c + d\cos(2\pi\,\cdot\,)$ est périodique, il suffit de vérifier la partie en $x \mapsto ax^2 + bx$. En évaluant la fonction et ses dérivées en 0 et en 1 on obtient
   — si $a + b \neq 0$, alors $k = 0$;
   — si $a + b = 0$ et $a \neq 0$, alors $k = 1$;
   — si $a = b = 0$ alors $k = \infty$.

2. De façon similaire, on vérifie cette fois que la fonction et ses dérivées s'annulent au bord puisqu'on a la caractérisation :

$$u \in H^k_0(]0,1[) \quad \text{si et seulement si} \quad u \in H^k(]0,1[) \text{ et } \forall j \leq k-1\,,\; u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0.$$

   On a pour tout $x \in]0,1[$

$$f'_{a,b,c,d}(x) = 2ax + b - 2\pi d \sin(2\pi x) \qquad \text{et} \qquad f''_{a,b,c,d}(x) = 2a - 4\pi^2 \cos(2\pi x),$$

   de sorte que

$$f(0) = c + d\,, \quad f(1) = a + b + c + d\,, \quad f'(0) = b\,, \quad f'(1) = 2a + b\,, \quad f''(0) = f''(1) = 2a - 4\pi^2 d.$$

   Finalement
   — si $a + b \neq 0$ ou $c + d \neq 0$, alors $k = 0$;
   — si $a + b = c + d = 0$ et $a \neq 0$, alors $k = 1$;
   — si $a + b = c + d = 0$, $a = 0$ et $d \neq 0$, alors $k = 2$;
   — si $a = b = c = d = 0$, alors $k = \infty$.

Exercise 4. Soit $d \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer $a \in \mathbf{R}$ tel que pour toute fonction intégrable sur $\mathbf{R}^d$ et tout $\lambda > 0$,
$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right) = \lambda^a\,\mathcal{F}(f)(\lambda\,\cdot)\,.$$

2. En déduire que si $(p,q) \in [1,\infty]^2$ sont tels qu'il existe $C \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout f $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}^d$,
$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} \leq C\,\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}$$
alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Correction :

1. En posant le changement de variable $u = \lambda^{-1}x$ on a pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$
$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\,f(\lambda^{-1}x)\,\mathrm{d}x = \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi\cdot u}\,f(u)\,\mathrm{d}u = \lambda^d\mathcal{F}(f)(\lambda\xi).$$
Donc $a = d$ convient.

2. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ non identiquement nulle et $\lambda > 0$, on note $f_\lambda = f(\lambda^{-1}\cdot)$ de sorte que $\mathcal{F}(f_\lambda) = \lambda^d\mathcal{F}(f)(\lambda\cdot)$ par ce qui précède. D'une part on a
$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(f_\lambda)\|_{L^q}^q &= \lambda^{qd}\|\mathcal{F}(f)(\lambda\cdot)\|_{L^q}^q\\ &= \lambda^{d(q-1)}\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q}^q,\end{aligned}$$
et d'autre part
$$\|f_\lambda\|_{L^p}^p = \lambda^d\|f\|_{L^p}^p.$$
En injectant dans l'inégalité $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}$ on a alors
$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} \leq C\lambda^{-d\left(\frac{q-1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}.$$
Comme cette inégalité est valable pour tout $\lambda > 0$, on peut faire tendre λ vers $+\infty$ (respectivement vers 0^+) ce qui donne la condition
$$\frac{q-1}{q} - \frac{1}{p} \leq 0 \quad \left(\text{respectivement } \frac{q-1}{q} - \frac{1}{p} \geq 0\right),$$
et finalement on a nécessairement $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercise 5. On définit $E_{impair} : L^1_{loc}(]0,\frac{1}{2}[) \to L^1_{loc}(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)$ par, pour tout $u \in L^1_{loc}(]0,\frac{1}{2}[)$,
$$E_{impair}(u) :]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}[\to \mathbf{R}\,,\ x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$
Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$\begin{aligned}&E_{impair}^{-1}(H^k_{\text{pér}}(]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}[))\\ &= \left\{u \in H^k(]0,\tfrac{1}{2}[)\,;\text{ pour tout } j \in \mathbf{N} \text{ tel que } 2j \leq k-1, \quad u^{(2j)}(0) = 0 \text{ et } u^{(2j)}(\tfrac{1}{2}) = 0\right\},\end{aligned}$$
où les valeurs en 0 et en $\frac{1}{2}$ sont définies au sens des traces.

Correction :

Notons que pour u suffisamment dérivable et $v = E_{impair}(u)$, on a

$$\forall l \in \mathbf{N}\,,\ v^{(l)}(x) = \begin{cases} u^{(l)}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ (-1)^{l+1} u^{(l)}(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}. \tag{1}$$

On procède par double inclusion.

— Soit $u \in H^k(]0, \frac{1}{2}[)$ telle que pour $2j \leq k-1$, $u^{(2j)}(0) = u^{(2j)}(\frac{1}{2}) = 0$. Soit $v = E_{impair}(u)$, v est H^k sur chacun des sous-intervalles $]-\frac{1}{2}, 0[$ et $]0, \frac{1}{2}[$. Pour obtenir $v \in H^k(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$, il suffit de raccorder les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre $k-1$. D'après (1), les dérivées d'ordre impair coïncident à gauche et à droite de 0, et les dérivées d'ordre pair coïncident car $u^{(2j)}(0) = 0$ par hypothèse. Pour la périodicité, le même argument avec (1) assure que $v^{(l)}(\frac{1}{2}) = v^{(l)}(-\frac{1}{2})$ pour tout $l \leq k-1$, et donc finalement $v \in H^k_{\text{pér}}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$.

— Soit $u \in E^{-1}_{impair}\big(H^k_{\text{pér}}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)\big)$, et $v = E_{impair}(u)$, alors u et v coïncident sur $]0, \frac{1}{2}[$ et en particulier $u \in H^k\big(]0, \frac{1}{2}[\big)$. Soit $j \in \mathbf{N}$ tel que $2j \leq k-1$, comme v est dans $H^k_{\text{pér}}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ on a $v^{(2j)}(\frac{1}{2}) = v^{(2j)}(-\frac{1}{2})$ de sorte que $u^{(2j)}(\frac{1}{2}) = -u^{(2j)}(\frac{1}{2})$ et donc $u^{(2j)}(\frac{1}{2}) = 0$.
De plus, v est de classe C^{k-1} sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, les dérivées en 0 doivent donc coïncider à gauche et à droite, ce qui donne $u^{(2j)}(0) = 0$ pour $j \in \mathbf{N}$ tel que $2j \leq k-1$ (les dérivées d'ordre impair ne posent pas de problème au vu de (1)).