Université de Rennes Semestre printemps 2025-2026

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n$^{\text{o}}$ 2

Rappel de notations : Les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\, x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j \in \mathbf{Z}\,.$$

De plus, pour $k \in \mathbf{N}$, on note $H^k_{\text{pér}}(]a, a+T[)$ l'adhérence des polynômes trigonométriques $T\mathbf{Z}$-périodiques dans $H^k(]a, a+T[)$, et l'on pose

$$H^\infty_{\text{pér}}(]a, a+T[) = \cap_{k\in\mathbf{N}}\, H^k_{\text{pér}}(]a, a+T[)\,.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\sin(4\pi\,\cdot)$
2. $2 + \sin(2\pi\,\cdot) + \cos(8\pi\,\cdot)$
3. $\sin(2\pi\,\cdot)^2 + \cos(4\pi\,\cdot)^3$

Exercise 2. Calculer en fonction de $n \in \mathbf{Z}$ les intégrales suivantes

$$I_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(0,1)} (z+1)^2\, z^n\,\mathrm{d}z, \quad J_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(2,1)} (z+1)^2\, z^n\,\mathrm{d}z, \quad K_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(2,1)} (z+1)^2\,(z-2)^n\,\mathrm{d}z,$$

où les bords sont orientés dans le sens direct et, pour tout $(a, r) \in \mathbf{C}\times\mathbf{R}_+$, $D(a, r)$ note le disque ouvert complexe centré en a et de rayon r.

Exercise 3. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on considère

$$f_\alpha \;:\;]-1, 1[\to \mathbf{R}\,, \quad x \mapsto \cos(4\pi\,\alpha\, x)\,.$$

Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$ le plus grand $k \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ tel que $f_\alpha \in H^k_{\text{pér}}(]-1, 1[)$.

Exercise 4.

1. Montrer que pour tout $(\alpha, p) \in \mathbf{R}_+\times[1, \infty]$, il existe $K > 0$ tel que
   — si $\alpha + 1/p < 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ mesurable
   $$\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |u| \le K\,\varepsilon^{1-\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}\,\|\,|\cdot|^\alpha\, u\|_{L^p(\mathbf{R})}$$
   — si $\alpha + 1/p > 1$, alors pour tout $R > 0$ et tout $u : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ mesurable
   $$\int_{\mathbf{R}\setminus]-R,R[} |u| \le \frac{K}{R^{\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)-1}}\,\|\,|\cdot|^\alpha\, u\|_{L^p(\mathbf{R})}$$

— si $\alpha + 1/p = 1$, alors pour tout $0 < \varepsilon \leq R$ et tout $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mesurable

$$\int_{[-R,R] \setminus]-\varepsilon,\varepsilon[} |u| \leq K \left(\ln\left(\frac{R}{\varepsilon}\right)\right)^{\alpha} \| \, |\cdot|^{\alpha} \, u \|_{L^p(\mathbf{R})}$$

2. Pour tout $(\eta, A, B) \in (\mathbf{R}_+^*)^3$, déterminer $\varepsilon_c = \varepsilon_c(\eta, A, B) > 0$ tel que

$$\inf_{\varepsilon > 0} \left(A\,\varepsilon^{\eta} + B \,\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \; = \; A\,\varepsilon_c^{\eta} + B\,\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_c}\right) \, .$$

3. En déduire, pour tout $(\eta, A, B) \in (\mathbf{R}_+^*)^3$, $R_c = R_c(\eta, A, B) > 0$ tel que

$$\inf_{R > 0} \left(\frac{A}{R^{\eta}} + B\,\ln(R)\right) \; = \; \frac{A}{R_c^{\eta}} + B\,\ln(R_c) \, .$$

4. Montrer que pour tout $(\eta, \zeta, A, B, C) \in (\mathbf{R}_+^*)^5$,

$$\varepsilon_c\left(\eta, A + \frac{1}{\eta}B, B\right) \leq R_c\left(\zeta, C + \frac{1}{\zeta}B, B\right) \, .$$

5. Montrer qu'il existe $K' > 0$ tel que pour tout u mesurable non nul tel que $|\cdot|\, u \in L^1(\mathbf{R})$, alors

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^1(\mathbf{R})} \\ &\leq \; K' \, \| \, |\cdot| \, u\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \left(1 + \ln\left(\frac{(2\| \, |\cdot|^{\frac{1}{2}} \, u\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \| \, |\cdot| \, u\|_{L^\infty(\mathbf{R})})(2\| \, |\cdot|^{\frac{3}{2}} \, u\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \| \, |\cdot| \, u\|_{L^\infty(\mathbf{R})})}{\| \, |\cdot| \, u\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2}\right)\right) \, . \end{aligned}$$