
Contrôle continu n° 2

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$ -périodiques d'une fonction $L^1_{loc} T\mathbf{Z}$ -périodique sont définis par

$$c_j^T(u) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2i\pi j}{T}x} u(x) dx, \quad j \in \mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^d.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$ -périodiques des fonctions suivantes.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\sin(2\pi \cdot)$ | 2. $\cos(6\pi \cdot)$ | 3. $2 + \sin(4\pi \cdot) + \cos(8\pi \cdot)$ |
| 4. $\sin(2\pi \cdot)^2 + \cos(4\pi \cdot)^3$ | 5. $\cos(2\pi \cdot) \sin(6\pi \cdot)$ | 6. $\cos(2\pi \cdot)^2 \sin(2\pi \cdot)^3$ |

Exercise 2.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}^*$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} x f(x) f'(x) dx = c \|f\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire qu'il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbf{R})$

$$c_0 \|f\|_{L^2}^4 \leq \left(\int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)^2 dx \right) \times \left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2 |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi \right).$$

Exercise 3. On se donne $\omega : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ mesurable et l'on définit

$$X := \left\{ u \in W_{loc}^{1,1}(\mathbf{R}) ; \|u\|_X < +\infty \right\}$$

où $\|\cdot\|_X$ est défini par

$$\|u\|_X^2 := \int_{\mathbf{R}} \omega(x) (u(x))^2 dx + \int_{\mathbf{R}} (u'(x))^2 dx.$$

On suppose que $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \omega > 0$, c'est-à-dire qu'il existe $\omega_0 > 0$ et $R > 0$ tel que pour tout $|x| \geq R$, $\omega(x) \geq \omega_0$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_X$ définit une norme sur X .
2. Montrer que si $\chi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbf{R})$ est constant sur $[-R, R]$, alors il existe C_χ tel que, pour tout $u \in X$, l'on ait $\chi u \in W_{loc}^{1,1}(\mathbf{R})$ avec

$$\|(\chi u)'\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq C_\chi \|u\|_X.$$

3. Montrer que l'application $j_1 : X \rightarrow H^1(\mathbf{R})$, $u \mapsto u$ est bien définie et continue.
4. Montrer que $(X, \|\cdot\|_X)$ est complet.
5. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ est dense dans X .
6. Montrer que pour tout $f \in H^{-1}(\mathbf{R})$, il existe un unique $u \in X$ tel que $\omega u - u'' = f$.
7. Donner explicitement $u \in X$ tel que $\omega u - u'' = \delta_0$ quand $\omega = \mathbf{1}_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]}$.
8. Montrer que si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega = +\infty$, alors l'injection $j_2 : X \rightarrow L^2(\mathbf{R})$, $u \mapsto u$ est compacte.