Université de Rennes Semestre printemps 2023-2024

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n° 2

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) \;=\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\,x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j\in\mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \;=\; \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi\in\mathbf{R}^d\,.$$

De plus,

— pour $k\in\mathbf{N}$, on note $H^k_{\text{pér}}(]a,a+T[)$ l'adhérence des polynômes trigonométriques $T\mathbf{Z}$-périodiques dans $H^k(]a,a+T[)$, et l'on pose

$$H^\infty_{\text{pér}}(]a,a+T[) = \cap_{k\in\mathbf{N}} H^k_{\text{pér}}(]a,a+T[)$$

— pour $k\in\mathbf{N}$, on note $H^k_0(]a,b[)$ l'adhérence dans $H^k(]a,b[)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]a,b[$, et l'on pose

$$H^\infty_0(]a,b[) = \cap_{k\in\mathbf{N}} H^k_0(]a,b[)\,.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\cos(2\pi\,\cdot)$
2. $\sin(8\pi\,\cdot)$
3. $1+\cos(4\pi\,\cdot)+\sin(8\pi\,\cdot)$
4. $\cos(2\pi\,\cdot)^2+\sin(8\pi\,\cdot)^3$
5. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(8\pi\,\cdot)$
6. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(2\pi\,\cdot)^4$

Exercise 2. Soit (E,μ) un espace mesuré, $\omega : E\to\mathbf{R}_+$ et $f : E\to\mathbf{R}$ mesurables, $(s_0,s_1)\in\mathbf{R}^2$, $(p_0,p_1)\in[1,\infty]^2$ et $\theta\in[0,1]$. On définit $(s_\theta,p_\theta)\in\mathbf{R}\times[1,\infty]$ par

$$s_\theta = s_0\,(1-\theta)+s_1\,\theta\,, \qquad \frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\,.$$

Montrer que

$$\|\omega^{s_\theta} f\|_{L^{p_\theta}} \le \|\omega^{s_0} f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta}\,\|\omega^{s_1} f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\,.$$

Exercise 3. Pour $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$, on considère

$$f_{a,b,c,d} \,:\,]0,1[\to\mathbf{R}\,,\quad x\mapsto a\,x^2+b\,x+c+d\,\cos(2\pi\,x)\,.$$

1. Déterminer en fonction de $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$ le plus grand $k\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d}\in H^k_{\text{pér}}(]0,1[)$.
2. Déterminer en fonction de $(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$ le plus grand $k\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ tel que $f_{a,b,c,d}\in H^k_0(]0,1[)$.

Exercise 4. Soit $d \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer $a \in \mathbf{R}$ tel que pour toute fonction intégrable sur $\mathbf{R}^d$ et tout $\lambda > 0$,
$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right) = \lambda^a \, \mathcal{F}(f)(\lambda \cdot) .$$
2. En déduire que si $(p, q) \in [1, \infty]^2$ sont tels qu'il existe $C \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout f $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbf{R}^d$,
$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} \leq C \, \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}$$
alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercise 5. On définit $E_{impair} \,:\, L^1_{loc}(]0, \frac{1}{2}[) \to L^1_{loc}(] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$ par, pour tout $u \in L^1_{loc}(]0, \frac{1}{2}[)$,
$$E_{impair}(u) \,:\,] - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[\to \mathbf{R}\,,\; x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -u(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} &E^{-1}_{impair}(H^k_{\text{pér}}(] - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[)) \\ &\quad = \left\{ u \in H^k(]0, \tfrac{1}{2}[)\,;\, \text{pour tout } j \in \mathbf{N} \text{ tel que } 2\,j \leq k-1, \qquad u^{(2j)}(0) = 0 \text{ et } u^{(2j)}(\tfrac{1}{2}) = 0 \right\} , \end{aligned}$$

où les valeurs en 0 et en $\frac{1}{2}$ sont définies au sens des traces.