Contrôle continu 1

Exercice 1 :

1. u se prolonge continûment à $[0,1[$

et $u(x) \underset{x\to 1}{\sim} 2^a (1-x)^b$.

Donc d'après le critère d'intégrabilité de Riemann

pour $p \in [1,+\infty[$, on a :

$$u \in L^p(]0,1[) \text{ ssi } bp > -1$$
$$\text{ssi } p \in \begin{cases} [1,+\infty[& \text{si } b \geq 0 \\ [1, -\frac{1}{b}[& \text{si } b < 0 \end{cases}.$$

En particulier, aucun p ne convient si $b \leq -1$.

2. u se prolonge de manière $\mathcal{C}^1$ à $[0,1[$ et même à $[0,1]$ si $b=0$.

Si $b \neq 0$, alors $u'(x) \underset{x\to 1}{\sim} -2^a b \,(1-x)^{p(b-1)}$.

Donc $u \in W^{1,p}(]0,1[)$

$$\text{ssi } p \in \begin{cases} [1,+\infty[& \text{si } (b \geq 1 \text{ ou } b = 0) \\ [1, \frac{1}{1-b}[& \text{si } (b < 1 \text{ et } b \neq 0) \end{cases}.$$

En particulier, aucun p ne convient si $b<0$.

3. u se prolonge continûment en 0

avec $u(0) = 1 \neq 0$.

Donc u n'appartient à aucun $W_0^{1,p}(]0,1[)$

pour $p \in [1,+\infty[$.

Exercice 2 :

1. D'après le théorème de Riesz, on sait que pour tout $f \in H^{-1}(]0,L[)$ il existe un unique $u \in H^1_0(]0,L[)$ tel que $u - u'' = f$.

De plus, par une récurrence immédiate basée sur $u'' = u - f$, on a que si $f \in H^k(]0,L[)$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors $u \in H^{k+2}(]0,L[)$.

Par ailleurs,

$$\mathcal{C}^\infty([0,L]) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H^k(]0,L[) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{C}^{k-1}([0,L]) \subset \mathcal{C}^\infty([0,L])$$

donc $\mathcal{C}^\infty([0,L]) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H^k(]0,L[)$.

D'où le résultat.

2. Pour $u \in \mathcal{C}^\infty([0,L])$, on a :

$u + u'' \equiv 0$ ssi il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall x \in [0,L],\ u(x) = a e^{ix} + b e^{-ix}$.

Par ailleurs, dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} a + b = 0 \\ a e^{iL} + b e^{-iL} = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} b = -a \\ 2ia \sin(L) = 0 \end{cases}$$

ssi $(L \in \pi\mathbb{Z}$ et $b = -a)$ ou $(a,b) = (0,0)$.

Ainsi $\mathcal{E}_L$ est de dimension $\begin{cases} 0 & \text{si } L \notin \pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } L \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

Exercice 3 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left\langle 2\delta_{-\frac{1}{n}} + 3\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{2}{n}} \,;\, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{C}_c^\infty}$$

$$= 2\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) + 3\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{2}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\varphi(0) + 3\varphi(0) - \varphi(0) = 4\varphi(0).$$

D'où le résultat avec $\gamma = 4$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left\langle n\left(-\delta_{-\frac{1}{n}} + 2\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{2}{n}}\right); \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{C}_c^\infty}$$

$$= n\left[-\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) + 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} n\left[\varphi(0)(-1+2-1) + \frac{\varphi'(0)}{n}(1+2+2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 5\varphi'(0).$$

D'où le résultat avec $\gamma = -5$.

3. Soit $l \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_l$ 2 à 2 distincts

et $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ non nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

on a :

$$\left\langle \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, \delta_{\frac{x_j}{n}} \, ; \, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{C}_c^\infty}$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, \varphi\left(\frac{x_j}{n}\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \sum_{m=0}^{\ell-1} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m! \; n^m} \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, x_j^m \; + \; O\left(\frac{1}{n^\ell}\right).$$

D'après les hypothèses sur les coefficients il existe $m \in [\![0, \ell-1]\!]$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, x_j^m \neq 0$.

Notons k le plus petit de ces indices.

Alors

$$\left\langle n^k \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, \delta_{\frac{x_j}{n}} \, ; \, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{C}_c^\infty}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, x_j^k .$$

D'où le résultat avec $\gamma = \dfrac{(-1)^k}{k!} \sum\limits_{j=1}^{\ell} \alpha_j \, x_j^k$.

Exercice 4 :

1. **(a)** Soit $u \in L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E)$.

On a : $|u| = |u|^{1-\theta} \, |u|^{\theta}$

de sorte qu'en appliquant l'inégalité de Hölder

avec $\frac{p_0}{1-\theta} \in [1, \infty]$, $\frac{p_1}{\theta} \in [1, \infty]$, $p_\theta \in [1, \infty]$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

on a :

$$\|u\|_{L^{p_\theta}} = \| |u| \|_{L^{p_\theta}} \leq \| |u|^{1-\theta} \|_{L^{\frac{p_0}{1-\theta}}} \, \| |u|^{\theta} \|_{L^{\frac{p_1}{\theta}}}$$

$$= \|u\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \, \|u\|_{L^{p_1}}^{\theta} < +\infty$$

Ainsi $u \in L^{p_\theta}(E)$

et $$\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \leq \|u\|_{L^{p_0}}^{(1-\theta)p_\theta} \, \|u\|_{L^{p_1}}^{\theta p_\theta}.$$

(b) D'après l'inégalité de Young, on a

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, pour tout $\varepsilon > 0$

et tout $(p, q) \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$a \, b \leq \frac{1}{p} \varepsilon^p a^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\varepsilon^q} b^q \leq \varepsilon^p a^p + \frac{1}{\varepsilon^q} b^q.$$

Il suffit de combiner 1.(a) avec

l'inégalité de Young où $(a, b) = \left(\|u\|_{L^{p_0}}^{(1-\theta)p_\theta}, \|u\|_{L^{p_1}}^{\theta p_\theta} \right)$

et $(p, q) = \left(\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}, \frac{p_1}{\theta p_\theta} \right)$

pour obtenir le résultat avec $C = 1$.

(c) Il suffit de montrer que, pour tout $M>0$, il existe $\varepsilon>0$ tel que
$$\begin{cases} \varepsilon^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} = M^{p_\theta-p_0} \\ \varepsilon^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = M^{p_1-p_\theta} \end{cases}$$

c'est-à-dire de montrer que, pour tout $M>0$, en posant $\varepsilon = M^{\frac{p_\theta(1-\theta)}{p_0}(p_\theta-p_0)}$ on a bien
$$\varepsilon^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = M^{p_1-p_\theta}.$$

Autrement dit, il suffit de montrer que, pour tout $M>0$,
$$M^{\frac{1-\theta}{\theta}\frac{p_1}{p_0}(p_\theta-p_0)} = M^{p_1-p_\theta}.$$

Cela découle du fait que
$$\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_\theta}}{\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_1}} = \frac{\theta}{1-\theta}$$ qui vient de
$$(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_\theta}\right)=\theta\left(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_1}\right).$$

2. Soit $M>0$.

Notons k_0 la partie entière inférieure de $\frac{\ln(M)}{\ln(2)}$ et k_1 la partie entière supérieure de $\frac{\ln(M)}{\ln(2)}$.

On reconnaît des sommes de suite géométriques de raison $\neq 1$,
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ 2^k\leq M}} 2^{k(p_\theta-p_0)} = \frac{2^{(k_0+1)(p_\theta-p_0)}}{2^{p_\theta-p_0}-1} \leqslant \frac{2^{p_\theta-p_0}}{2^{p_\theta-p_0}-1}\, M^{p_\theta-p_0}$$
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ 2^k\geqslant M}} \frac{1}{2^{k(p_1-p_\theta)}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(k_1+1)(p_1-p_\theta)}}{1-\frac{1}{2^{p_1-p_\theta}}} \leqslant \frac{1}{2^{p_1-p_\theta}-1}\,\frac{1}{M^{p_1-p_\theta}}.$$

D'où le résultat avec

$$C = \mathrm{Max}\left(\left\{ \frac{2^{p_\theta - p_0}}{2^{p_\theta - p_0} - 1} ; \frac{1}{2^{p_1 - p_\theta} - 1} \right\}\right).$$

3. (a) Notons que

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} |u|^{-1}([2^k ; 2^{k+1}[)$$

est une union disjointe.

On en déduit

$$|u|^{p_\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u|^{p_\theta} \mathbb{1}_{|u|^{-1}([2^k ; 2^{k+1}[)}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^{p_\theta}.$$

En intégrant, on obtient $\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u_k\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta}$.

(b). En appliquant 1.(c) à chaque u_k avec $M_k = 2^k$, on déduit

$$\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u_k\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \leq C\, \mathcal{E}(u).$$

Pour cela, on a noté que le résultat de la question 1.(c) s'applique aussi en supposant seulement la fonction mesurable (quitte à ce que le second membre soit $+\infty$).

Par ailleurs, en combinant le théorème de Fubini avec 2., ~~on obtient~~ avec $M(x) = |u(x)|$ et $M(x) = \frac{|u(x)|}{2}$, on obtient :

$$\mathcal{E}(u) = \int |u(x)|^{p_0} \Big(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k \leq |u(x)|}} 2^{k(p_\theta - p_0)} \Big) \, d\mu(x)$$

$$+ \int |u(x)|^{p_1} \Big(\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 2^k > \frac{|u(x)|}{2}}} \frac{1}{2^{k(p_1 - p_\theta)}} \Big) \, d\mu(x)$$

$$\leq C \left(1 + 2^{p_1 - p_\theta} \right) \|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} .$$

D'où le résultat avec $C_1 = C$

et $C_0 = \dfrac{1}{C(1 + 2^{p_1 - p_\theta})}$.