Contrôle continu 1

Exercice 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et u_a la fonction correspondante.

u_a est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (avec des limites à gauche et à droite pour la dérivée).

Donc sa dérivée au sens des distributions est $u_a' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

i.e. $u_a' = a \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$.

D'où $u_a'' = a \, \delta_0$.

Ainsi u_a convient si et seulement ~~[illegible]~~ si $\boxed{a = 1}$

On fait ce choix dorénavant.

2. Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a donc

$u'' = \delta_0$ si et seulement si $u'' = u_1''$

si et seulement s'il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u' = u_1' + C_0$

si et seulement s'il existe $(C_0, C_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} C_0 x + C_1 & \text{si } x < 0 \\ (C_0 + 1)x + C_1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

3. Soit $(C_0, C_1) \in \mathbb{R}^2$ et u associé comme ci-dessus.

Alors u est impaire

si et seulement si pour tout $x > 0$, $(1+C_0)x + C_1 = -(C_0(-x)+C_1)$

si et seulement si $1 + C_0 = C_0$ et $C_1 = -C_1$.

Impossible. Il n'y a pas de solution.

4. Soit $(C_0, C_1) \in \mathbb{R}^2$ et u associé.

Alors, de même,

u est paire si et seulement si $1 + C_0 = -C_0$ et $C_1 = C_1$

si et seulement $C_0 = -\frac{1}{2}$.

Dans ce cas

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x + C_1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x + C_1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

i.e. $\boxed{u = \frac{1}{2}|\cdot| + C_1}$

avec C_1 arbitraire.

5. Soit $(C_0, C_1) \in \mathbb{R}^2$ et u associé.

Alors u est de support inclus dans $\mathbb{R}_-$

si et seulement si pour tout $x > 0$, $(1+C_0)x + C_1 = 0$

si et seulement si $1 + C_0 = 0$ et $C_1 = 0$

si et seulement si $C_0 = -1$ et $C_1 = 0$.

Dans ce cas, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

6. Soit $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$ et u associé.

Si $c_0 \neq 0$, alors $u(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} c_0 x$

donc u n'est pas de carré intégrable au voisinage de $-\infty$.

De même, si $c_0 \neq -1$, alors $u_0(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (1+c_0)x$

donc u n'est pas de carré intégrable au voisinage de $+\infty$.

Dans tous les cas, u n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il n'y a pas de solution.

Exercice 2 :

1. Soit $1 \leq p < \infty$.

K est p-intégrable au voisinage de l'infini si et seulement si $pr > 1$

K est p-intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $pr < 1$.

Donc K n'est jamais p-intégrable, $K \notin L^p(\mathbb{R})$.

De même, ~~K est borné au voisinage de~~

comme $r > 0$, $\lim\limits_{0^+} K = +\infty$

donc $K \notin L^\infty(\mathbb{R})$.

2. Posons $K_0 = K \mathbb{1}_{]0,1[}$

$K_1 = K \mathbb{1}_{[1,+\infty[}$

de sorte que $K = K_0 + K_1$.

D'après les arguments donnés dans la réponse à la question 1.,

pour tout $1 \leq p_0 < \frac{1}{r} < p_1 \leq \infty$

$$K_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad K_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R})$$

(même si $p_1 = \infty$, car K_1 est borné)

donc $K = K_0 + K_1 \in L^{p_0}(\mathbb{R}) + L^{p_1}(\mathbb{R})$.

3. Soit $M > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(K * f)(x)| = \left| \int_{[-M,M]} K(z) f(x-z)\,dz + \int_{\mathbb{R}\setminus[-M,M]} K(z) f(x-z)\,dz \right|$$

$$\leq \|K\|_{L^1([-M,M])} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$+ \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus[-M,M])} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$= \frac{2}{1-r} M^{1-r} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{M^r} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

$$\leq \frac{2}{1-r} \left[M^{1-r} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{M^r} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \right]$$

car $\int_0^M \frac{dz}{z^r} = \frac{M^{1-r}}{1-r}$ et $\frac{2}{1-r} \geq 2 \geq 1$.

D'où $\|K * f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \left[M^{1-r} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{M^r} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \right]$

avec $C = \frac{2}{1-r}$.

4. Montrons que $C_0 = 2C$ avec C comme dans la question précédente convient.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Si f est nulle, il n'y a rien à montrer.

Si f n'est pas nulle, on peut poser $M = \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$ et appliquer la question précédente pour obtenir l'inégalité voulue.

Exercice 3 :

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, la forme bilinéaire

$$B_\varepsilon : H^1_0(]0,1[) \times H^1_0(]0,1[) \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto \int_0^1 uv + \varepsilon \int_0^1 u'v'$$

convient puisque pour tout $u \in H^1_0(]0,1[)$ et $\varphi \in \mathcal{D}_c^\infty(]0,1[)$,

$$\int_0^1 u'\varphi' = \langle -u'' ; \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

par définition de $u'' = (u')'$. On vérifie la continuité de B_ε dans la question suivante.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $H^{-1}(]0,1[) = H^1_0(]0,1[)^*$ il suffit de montrer que B_ε ci-dessus définit un produit scalaire équivalent au produit scalaire canonique sur $H^1_0(]0,1[)$ pour déduire le résultat du théorème de Riesz.

Notons que B_ε est bien bilinéaire symétrique.

Or pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$, on a :

$$\mathrm{Min}(\{1,\varepsilon\}) \|u\|^2_{H^1(]0,1[)} \leq B_\varepsilon(u,u) \leq \mathrm{Max}(\{1,\varepsilon\}) \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}.$$

D'où le résultat (puisque par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ dans $H_0^1(]0,1[)$ les éléments de $H^{-1}(]0,1[)$ s'identifient à des distributions).

<u>3.</u> Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in L^2(]0,1[)$.

Posons $u_\varepsilon = R_\varepsilon(f)$.

Alors on a :

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2} + \varepsilon \|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} = B_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \int_0^1 f u_\varepsilon .$$

Donc $\|u_\varepsilon\|^2_{L^2} \leq \left|\int f u_\varepsilon\right| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u_\varepsilon\|_{L^2}$

d'où $\boxed{\|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}}$ (que u_ε soit nulle ou non).

On en déduit

$$\varepsilon \|u'_\varepsilon\|^2_{L^2} \leq \left|\int_0^1 f u_\varepsilon\right| \leq \|f\|_{L^2} \|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|^2_{L^2}$$

d'où $\boxed{\sqrt{\varepsilon}\, \|u'_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}}$.

Enfin, $\varepsilon u'' = -f + u$ donc $\varepsilon \|u''\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}$
$\leq 2 \|f\|_{L^2}$

$$\boxed{\varepsilon \|u''\|_{L^2} \leq 2 \|f\|_{L^2}}.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in H^1_0(]0,1[)$. ~~Notons~~ $u_\varepsilon = R_\varepsilon(f)$.

On a : $u_\varepsilon'' - \varepsilon (u_\varepsilon'')'' = f''$

$$f'' = (f')' \in H^{-1}(]0,1[) \quad \text{car} \quad f' \in L^2$$

$$u_\varepsilon'' = \frac{1}{\varepsilon}(-f + u_\varepsilon) \in H^1_0(]0,1[)$$

donc $R_\varepsilon(f)'' = u_\varepsilon'' = R_\varepsilon(f'')$.

5. Soit $f \in H^1_0(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\| R_\varepsilon(f) - f \|_{L^2} = \| \varepsilon R_\varepsilon(f)'' \|_{L^2} = \varepsilon \| R_\varepsilon(f'') \|_{L^2}$$

$$\leq \varepsilon \| f'' \|_{L^2} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Donc $R_\varepsilon(f) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ dans L^2.

6. Comme $H^1_0(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$ (car $\mathcal{C}^\infty_c(]0,1[)$ l'est) et que les R_ε sont des opérateurs ~~continus~~, linéaires il suffit d'observer que R_ε est ~~uniformément~~ ~~(par rapport à ε)~~ continu de L^2 dans L^2 uniformément par rapport à ε (d'après la question 3).