Contrôle continu 1

Exercice 1

1. On a : $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+})' = \delta_0$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}' ; \varphi \rangle = - \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} ; \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \varphi'$$

$$= - [\varphi]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0 ; \varphi \rangle .$$

Ainsi, pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a :

$$u' = \delta_0 \iff u' = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}' \iff (u - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+})' = 0.$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on déduit que pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$u' = \delta_0$ si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} + C .$$

2. Soit $C \in \mathbb{R}$. Posons $u_C = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} + C$.

Notons que u_C est un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc u_C est impaire si et seulement si

pour presque tout $x > 0$, $u_C(x) = - u_C(-x)$

i.e. $C + 1 = - C$ i.e. $C = -\frac{1}{2}$

Ainsi la seule distribution impaire u telle que $u' = \delta_0$ est $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} - \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$.

3. Soit $C \in \mathbb{R}$. Posons $u_C = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} + C$.

Comme $u_C \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, le support de u_C est inclus dans $\mathbb{R}_+$ si et seulement si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^*_-$, $u_C(x) = 0$

i.e. $C = 0$.

Ainsi la seule distribution convenant est $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$.

Exercice 2

Pour $\lambda > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \delta_{0_N} ; \frac{1}{\lambda^N} \varphi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) \rangle = \frac{1}{\lambda^N} \varphi\left(\frac{0_N}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^N} \varphi(0_N)$$

$$= \frac{1}{\lambda^N} \langle \delta_{0_N} ; \varphi \rangle = \lambda^{-N} \langle \delta_{0_N} ; \varphi \rangle$$

Donc δ_{0_N} est homogène d'ordre $-N$.

Exercice 3

1. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $u' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Puisque $L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = C_0 + \int_0^x u'.$$

Considérons $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto C_0 + \int_0^x u'$.

Puisque $\mathrm{Lip}(u) = \mathrm{Lip}(v)$, il suffit de montrer que v est lipschitzienne avec $\mathrm{Lip}(v) \leq \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

Or pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|v(x) - v(y)| = \left| \int_y^x u' \right| \leq \left| \int_y^x |u'| \right|$$

$$\leq \|u'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |x-y| .$$

D'où le résultat.

2. Soit u bornée et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, on a :

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} = \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} \right)^\alpha \left(|u(x) - u(y)| \right)^{1-\alpha}$$

$$\leq \mathrm{Lip}(u)^\alpha \left(|u(x)| + |u(y)| \right)^{1-\alpha}$$

$$\leq \mathrm{Lip}(u)^\alpha \left(2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{1-\alpha} .$$

D'où $\|u\|_{W^{\alpha,\infty}(\mathbb{R})} \leq \mathrm{Lip}(u)^\alpha \left(2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right)^{1-\alpha}$.

Exercice 4

1. Comme I est borné, $\overline{I}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc $\overline{I}$ est compact.

Ainsi a est continue sur un compact donc elle est bornée et atteint ses bornes.

Il suffit donc de poser $a_0 = \inf_{\overline{I}} a = \min_{\overline{I}} a > 0$.

2. Soit ϕ $\mathcal{C}^2$ sur $\bar{I}$ et $u \in L^2(I)$.

$(\Rightarrow)$ Supposons $u \in H^1_0(I) \cap H^2(u)$.

Cela signifie $u \in H^2$ et pour tout $x \in \bar{I} \setminus I$,

$$Tr_{\{x\}}(u) = 0,$$

où Tr note l'opérateur de trace.

$e^{-\phi}$ est $\mathcal{C}^2$ sur le compact $\bar{I}$ donc $e^{-\phi}$, $(e^{-\phi})'$ et $(e^{-\phi})''$ sont bornées.

Cela implique $e^{-\phi} u \in H^2(I)$ puisque

$$\| e^{-\phi} u \|_{L^2} \leq \| e^{-\phi} \|_{L^\infty} \| u \|_{L^2} < +\infty$$

$$\| (e^{-\phi} u)' \|_{L^2} = \| (e^{-\phi})' u + e^{-\phi} u' \|_{L^2}$$

$$\leq \| (e^{-\phi})' \|_{L^\infty} \| u \|_{L^2} + \| e^{-\phi} \|_{L^\infty} \| u' \|_{L^2} < +\infty$$

et

$$\| (e^{-\phi} u)'' \|_{L^2} = \| (e^{-\phi})'' u + 2 (e^{-\phi})' u' + e^{-\phi} u'' \|_{L^2}$$

$$\leq \| (e^{-\phi})'' \|_{L^\infty} \| u \|_{L^2} + 2 \| (e^{-\phi})' \|_{L^\infty} \| u' \|_{L^2} + \| e^{-\phi} \|_{L^\infty} \| u'' \|_{L^2}$$

$$< +\infty.$$

De plus, en choisissant un représentant continu sur $\bar{I}$ de u (ce qui est possible parce que $H^1(I) \subset W^{1,1}(I)$) on déduit : pour $x \in \bar{I} \setminus I$,

$$(e^{-\phi} u)(x) = e^{-\phi(x)} u(x) = 0.$$

D'où $e^{-\phi} u \in H^1_0(I) \cap H^2(I)$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons $e^{-\phi}u \in H^1_0(I) \cap H^2(I)$.

On déduit $u = e^{\phi} e^{-\phi} u \in H^1_0(I) \cap H^2(I)$

en appliquant l'implication précédente à

$(e^{-\phi}u, -\phi)$ au lieu de (u, ϕ).

3. Si ϕ est $\mathcal{C}^2$ sur $\bar{I}$ et $u \in H^2(I)$, alors

on a :

$$(a(e^{-\phi}u)')' = (a(e^{-\phi}u' - \phi' e^{-\phi} u))'$$

$$= e^{-\phi}\left[a u'' + (a' - 2\phi' a \cancel{})u' + (-\phi' a' - \phi'' a + (\phi')^2 a)u\right]$$

donc

$$e^{\phi}(a u_{\phi}')' = (a u')' - 2\phi' a u' + (-\phi' a' - \phi'' a + (\phi')^2 a)u.$$

Il suffit donc de trouver ϕ $\mathcal{C}^2$ sur $\bar{I}$ et γ $\mathcal{C}^0$ sur $\bar{I}$ tels que
$$\begin{cases} 2\phi' a = b \\ \gamma + \phi' a' + \phi'' a - (\phi')^2 a = c \end{cases}$$

Il suffit donc de choisir une primitive ϕ de $\frac{b}{2a}$

puis de poser $\gamma = c + (\phi')^2 a - \phi' a' - \phi'' a$.

<u>Remarque:</u> En procédant autrement on trouve la formule

équivalente $\gamma = c - (\phi')^2 a + (b - a')\phi' - a\phi''$.

4. Pour un couple (ϕ, γ) satisfaisant à la question précédente supposons $\gamma \geq 0$.

En combinant les questions précédentes 2 et 3 on a :

$$\forall f \in L^2(I), \; \exists!\, u \in H^1_0(I) \cap H^2(I), \; -(au')' + bu' + cu = f$$

$$\Leftrightarrow \forall f \in L^2(I), \; \exists!\, v \in H^1_0(I) \cap H^2(I), \; -(av')' + \gamma v = e^{-\phi} f$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in L^2(I), \; \exists!\, v \in H^1_0(I) \cap H^2(I), \; -(av')' + \gamma v = g.$$

Dans la dernière équivalence on a utilisé que

$f \mapsto e^{-\phi} f$ est une bijection de L^2 sur L^2,

d'inverse $g \mapsto e^{\phi} g$.

Or en appliquant le théorème de Riesz avec le produit scalaire

$$B : \begin{array}{ccc} H^1_0(I) \times H^1_0(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v, w) & \longmapsto & \int_I (a v' w' + \gamma v w) \end{array}$$

on obtient que $\forall g \in H^{-1}(I), \; \exists!\, v \in H^1_0(I),$

$$-(av')' + \gamma v = g.$$

Le fait que B définit un produit scalaire de norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$ provient de :

- continuité : $\forall (v, w) \in H^1_0(I)^2, \; |B(v,w)| \leq \|a\|_{L^\infty} \|v'\|_{L^2} \|w'\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2}$

$$\leq (\|a\|_{L^\infty} + \|\gamma\|_{L^\infty}) \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1}$$

et

- coercitivité : $\forall\, v \in H^1_0,\quad B(v,v) \geqslant a_0\, \|v'\|^2_{L^2} = a_0 \|v\|^2_{\dot H^1}$

puisque $\|\cdot\|_{\dot H^1}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H^1_0(I)$.

Pour conclure il suffit de noter que si $g \in L^2(I)$ et $v \in H^1_0(I)$ vérifie

$$-(a v')' + \gamma v = g$$

alors $$v'' = \frac{1}{a}\left[\gamma v - a' v' - g\right] \in L^2(I)$$

donc $v \in H^2(I)$.