
Contrôle continu n° 1

Exercice 1. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On définit

$$u :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto (1+x)^a (1-x)^b.$$

1. Déterminer l'ensemble des $p \in [1, \infty[$ tels que $u \in L^p(]0, 1[)$.
2. Déterminer l'ensemble des $p \in [1, \infty[$ tels que $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$.
3. Déterminer l'ensemble des $p \in [1, \infty[$ tels que $u \in W_0^{1,p}(]0, 1[)$.

Exercice 2. Soit $L > 0$.

1. Justifier que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty([0, L])$, il existe un unique $u \in \mathcal{C}^\infty([0, L])$ tel que $u(0) = 0$, $u(L) = 0$ et $u - u'' = f$.
2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel

$$\mathcal{E}_L = \{ u \in \mathcal{C}^\infty([0, L]) ; \ u + u'' \equiv 0, \ u(0) = 0, \ u(L) = 0 \}.$$

Exercice 3. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note δ_a la masse de Dirac en a vue comme distribution sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer qu'existe et déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que $2\delta_{-\frac{1}{n}} + 3\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{2}{n}}$ converge vers $\gamma\delta_0$ au sens des distributions lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. Montrer qu'existe et déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que $n(-\delta_{-\frac{1}{n}} + 2\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{2}{n}})$ converge vers $\gamma\delta'_0$ au sens des distributions lorsque $n \rightarrow \infty$.
3. Montrer que pour tout $\ell \in \mathbf{N}^*$, tout $(\tau_1, \dots, \tau_\ell) \in \mathbf{R}^\ell$ de coordonnées deux à deux distinctes et tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbf{R}^\ell$ non nul, il existe $k \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in \mathbf{R}^*$ tel que $n^k \sum_{j=1}^\ell \alpha_j \delta_{\frac{\tau_j}{n}}$ converge vers $\gamma\delta_0^{(k)}$ au sens des distributions lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 4. Soit (E, μ) un espace mesuré σ -fini. Soit $1 < p_0 < p_1 < \infty$ et $0 < \theta < 1$. On définit p_θ par

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $u \in L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E)$, on a $u \in L^{p_\theta}(E)$ avec

$$\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \leq \|u\|_{L^{p_0}}^{(1-\theta)p_\theta} \|u\|_{L^{p_1}}^{\theta p_\theta}.$$

- (b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \|u\|_{L^{p_0}}^{p_0} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}} \|u\|_{L^{p_1}}^{p_1} \right).$$

(c) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in L^{p_0}(E) \cap L^{p_1}(E)$ et tout $M > 0$

$$\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \leq C \left(M^{p_\theta - p_0} \|u\|_{L^{p_0}}^{p_0} + \frac{1}{M^{p_1 - p_\theta}} \|u\|_{L^{p_1}}^{p_1} \right).$$

2. Montrer qu'il existe C tel que pour tout $M > 0$

$$\sum_{\substack{k \in \mathbf{Z} \\ 2^k \leq M}} 2^{k(p_\theta - p_0)} \leq C M^{p_\theta - p_0}, \quad \sum_{\substack{k \in \mathbf{Z} \\ 2^k \geq M}} \frac{1}{2^{k(p_1 - p_\theta)}} \leq C \frac{1}{M^{p_1 - p_\theta}},$$

3. Pour tout $u : E \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable, on définit

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left(2^{k(p_\theta - p_0)} \|u_k\|_{L^{p_0}}^{p_0} + \frac{1}{2^{k(p_1 - p_\theta)}} \|u_k\|_{L^{p_1}}^{p_1} \right)$$

où, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$u_k = u \mathbf{1}_{|u|^{-1}([2^k, 2^{k+1}[)},$$

et    tout ensemble mesurable A on associe $\mathbf{1}_A$ sa fonction caractéristique.

(a) Montrer que pour tout $u : E \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable,

$$\|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|u_k\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta}.$$

(b) Montrer qu'il existe C_0 et C_1 strictement positives telles que pour tout $u : E \rightarrow \mathbf{R}$ mesurable,

$$C_0 \mathcal{E}(u) \leq \|u\|_{L^{p_\theta}}^{p_\theta} \leq C_1 \mathcal{E}(u).$$