
Contrôle continu n° 1

Exercise 1. On note δ_0 la masse de Dirac en 0 vue comme distribution sur $\mathbf{R}$.

1. Déterminer $a \in \mathbf{R}$ tel que la fonction
$$u_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a\,x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
vérifie $u_0'' = \delta_0$.
2. En déduire toutes [1] les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u'' = \delta_0$.
3. Déterminer toutes les distributions impaires $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u'' = \delta_0$.
4. Déterminer toutes les distributions paires $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u'' = \delta_0$.
5. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de support inclus dans $\mathbf{R}_-$ telles que $u'' = \delta_0$.
6. Déterminer toutes les fonctions $u \in L^2(\mathbf{R})$ telles que $u'' = \delta_0$.

Exercise 2. Soit $0 < r < 1$. On considère
$$K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^r} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'on a $K \notin L^p(\mathbf{R})$.
2. Montrer que pour tout $1 \leq p_0 < r^{-1} < p_1 \leq \infty$, l'on a $K \in L^{p_0}(\mathbf{R}) + L^{p_1}(\mathbf{R})$.
3. Montrer qu'il existe C tel que pour tout $M > 0$ et toute $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$,
$$\|K \star f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \;\leq\; C \left(\frac{1}{M^r} \|f\|_{L^1(\mathbf{R})} + M^{1-r} \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \right).$$
On rappelle que la convolution est définie par
$$(K \star f)(x) \;=\; \int_{\mathbf{R}} K(x-y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \;=\; \int_{\mathbf{R}} K(z)\, f(x-z)\, \mathrm{d}z\,.$$
4. En déduire qu'il existe C_0 tel que pour toute $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$,
$$\|K \star f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \;\leq\; C_0\, \|f\|_{L^1(\mathbf{R})}^{1-r}\, \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{r}\,.$$

---

1. Dans tout l'exercice, la formulation « En déduire/Déterminer toutes les solutions »ne présuppose pas qu'il exixte une solution.

Exercise 3.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner une forme bilinéaire continue $B_\varepsilon : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $u \in H_0^1(]0,1[)$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$
$$B_\varepsilon(u,\varphi) \;=\; \langle u - \varepsilon\, u''; \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\,.$$
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in H^{-1}(]0,1[)$, il existe un unique $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $u - \varepsilon\, u'' = f$. On notera dorénavant $u := R_\varepsilon(f)$.
3. Montrer que si $\varepsilon > 0$ et $f \in L^2(]0,1[)$, alors $R_\varepsilon(f) \in H^2(]0,1[)$ et
$$\|R_\varepsilon(f)\|_{L^2(]0,1[)} \le \|f\|_{L^2(]0,1[)}\,, \quad \sqrt{\varepsilon}\,\|R_\varepsilon(f)'\|_{L^2(]0,1[)} \le \|f\|_{L^2(]0,1[)}\,, \quad \varepsilon\,\|R_\varepsilon(f)''\|_{L^2(]0,1[)} \le 2\,\|f\|_{L^2(]0,1[)}\,.$$
4. Montrer que si $f \in H_0^1(]0,1[)$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon(f)'' = R_\varepsilon(f'')$.
5. En déduire que si $f \in H_0^1(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$, alors $R_\varepsilon(f)$ converge dans $L^2(]0,1[)$ vers f dans la limite $\varepsilon \to 0$.
6. En déduire que, pour tout $f \in L^2(]0,1[)$, $R_\varepsilon(f)$ converge dans $L^2(]0,1[)$ vers f lorsque $\varepsilon \to 0$.