Université de Rennes Semestre printemps 2023-2024

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n° 1

<u>**Exercise 1.**</u> On note δ_0 la masse de Dirac en 0 vue comme distribution sur $\mathbf{R}$.

1. Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telles que $u' = \delta_0$.
2. Déterminer la seule distribution impaire $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $u' = \delta_0$.
3. Déterminer la seule distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que $u' = \delta_0$ dont le support est inclus dans $\mathbf{R}_+$.

<u>**Exercise 2.**</u> Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on dit qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ est homogène d'ordre α si pour tout $\lambda > 0$, et tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbf{R}^N)$,

$$\left\langle u\,;\, \frac{1}{\lambda^N}\,\varphi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \;=\; \lambda^\alpha\,\langle u\,;\,\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\,.$$

On note δ_{0_N} la masse de Dirac en l'origine vue comme distribution sur $\mathbf{R}^N$.
Déterminer α tel que δ_{0_N} soit homogène d'ordre α.

<u>**Exercise 3.**</u>

1. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est tel que $u' \in L^\infty(\mathbf{R})$ alors u coïncide presque partout avec une fonction lipscitzienne et
$$\mathrm{Lip}(u) := \mathrm{esssup}_{(x,y)\in\mathbf{R}^2}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \;\leq\; \|u'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\,.$$
2. Montrer que si u est bornée et lipschitzienne alors pour tout $0 < \alpha < 1$
$$\|u\|_{\dot W^{\alpha,\infty}(\mathbf{R})} \leq \left(2\,\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\right)^{1-\alpha}(\mathrm{Lip}(u))^\alpha\,.$$

<u>**Exercise 4.**</u> Soit I un intervalle bornée ouvert de $\mathbf{R}$ et a, b et c trois fonctions réelles $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{I}$. On suppose de plus que a est à valeurs dans $\mathbf{R}^\star_+$.

1. Justifier qu'il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{I}$, $a(x) \geq a_0$.
2. Montrer que si ϕ est une fonction réelle $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$, alors pour toute fonction $u \in L^2(I)$, on a que $u \in H^1_0(I) \cap H^2(I)$ équivaut à $\mathrm{e}^{-\phi}\,u \in H^1_0(I)\cap H^2(I)$.
3. Déterminer ϕ $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$ et γ $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{I}$ tels que pour tout $u \in H^1_0(I)\cap H^2(I)$, $u_\phi := \mathrm{e}^{-\phi}\,u$ vérifie
$$-(a\,u')' + b\,u' + c\,u \;=\; \mathrm{e}^\phi\,\left(-(a\,u_\phi')' + \gamma\,u_\phi\right)\,.$$
4. En déduire que si le γ de la question précédente vérifie $\gamma \geq 0$, alors, pour tout $f \in L^2(I)$, il existe un unique $u \in H^1_0(I)\cap H^2(I)$ tel que $-(a\,u')' + b\,u' + c\,u = f$.