Tobias Schmidt III

3 oct 17

Immeubles Sphériques III

3. Le thm de Tits (Revisité)

Soit (W, S) gp de Coxeter

un sous-gp <u>spécial</u> $W_T \subset W$ est un sous gp engendré par un $T \subset S$.

un <u>coset spécial</u> de la forme wW_T.

Le <u>complexe de Coxeter</u> est l'ensemble $\{wW_T,\ w \in W,\ T \subset S\}$ avec l'ordre $A \leq B \iff B \subset A$ ($\hat{c}$ sous-ensembles de W)

$\Sigma(W, S)$

Ex:
- chb $\longleftrightarrow$ $\{w \in W\}$, $T = \emptyset$
- sommets $\longleftrightarrow$ $\{wW_T\}$, $|T| = |S| - 1$
- $\emptyset$ $\longleftrightarrow$ $\{W_S\}$, $T = S$

Le gp W agit sur $\Sigma(W, S)$.

Soit maintenant $\# W < \infty$.

<u>Exposé I</u>: $\Rightarrow$ $W \curvearrowright V$ euclidien fidèle

$\mathcal{H} \subset V$ système d'hyperplan, W-inv

$\rightsquigarrow \Sigma$ le complexe de cellules.

Soit C la chb fondamentale

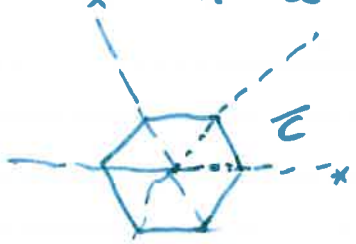
<u>Théo de Tits</u>: * $\bar{C}$ est un domaine fondamental strict pour l'action de W sur V.

Rq: $\# W < \infty$

$C_{Tits} = V$

* On a $\mathrm{Stab}_W(x) = \langle S_x \rangle$, $x \in \bar{C}$

$S_x = \{s \in S : sx = x\}$



En particulier, $\mathrm{Stab}_W(x)$ fixe tout point de $\bar{A}$ où A = cellule qui contient x

$\left(\mathrm{supp}\, A = \bigcap_{s \in S_x} H_s,\ \bar{A} = \mathrm{supp}(A) \cap \bar{C}\right)$.

~~En particulier, $\mathrm{Stab}_W(x)$ fixe tout point~~ c chb fondamental

Coro: On a un isomorphisme $\Sigma_{\leq c} \xrightarrow{\sim} \{$ss-gps spéciaux$\}$

Cela induit : $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma(W,S)$ équivalent°

Démo:

$$\begin{array}{lcl} \Sigma_{\leq c} & \longrightarrow & \{\text{sous-groupes spéciaux}\} \\ A_{\leq c} & \xmapsto{\varphi} & \mathrm{Stab}_W(A) \\ A & \xleftarrow{\psi} & W_T \end{array}$$

compatibles avec $\leq$.

tq: $\bar{A} = \mathrm{Fix}_{\bar{c}}(W_T)$

$$\begin{array}{lcl} \Sigma & \longrightarrow & \Sigma(W,S) \\ wA & \longmapsto & w\,\mathrm{Stab}_W(A) \\ wA & \longleftarrow & wW_T \end{array}$$

où $\bar{A} = \mathrm{Fix}_{\bar{c}}(W_T)$

4. Immeubles sphériques

Déf: Un <u>immeuble</u> est un complexe simplicial Δ tq il existe un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-complexes de Σ (Apartements) avec $\Delta = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{A}} \Sigma$ et avec:

(B0) Chaque Σ est un complexe de Coxeter.

(B1) pour $A, B \in \Delta$, $\exists \Sigma \in \mathcal{A}$, $A, B \in \Sigma$.

(B2) Si Σ, Σ' avec $A, B \in \Sigma \cap \Sigma'$, il existe un isomorphisme $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma'$ qui fixe A et B point par point.
En particulier, tous les apartements sont isomorphes (prendre $A = B = \emptyset$)

Prop Fondamentale:

(a) Toutes les chbs ont la même dimension $n = \dim \Delta$.
Deux chbs C, D sont reliées par une galerie.
$\rightsquigarrow d(C,D)$ distance combinatoire

(b) $\exists$ gp de Coxeter (W,S) et pour chaque $\Sigma \in \mathcal{A}$ il existe un isomorphisme $\Sigma \simeq \Sigma(W,S)$.
En particulier, $\dim \Delta = |S| - 1$.
Le gp (W,S) ne dépend pas de $\mathcal{A}$ donc c'est un invariant de Δ.

les relations sont données par les liens des faces de codim 2 de $\mathcal{A}$

(c) Σ apartement, $C \in \Sigma$ chambre
$\exists$ unique rétraction $\rho_{\Sigma,C} : \Delta \longrightarrow \Sigma$
(application simplicial, chbs $\to$ chbs, $\rho|_\Sigma = id$)

* ρ envoie chaque Σ qui contient C isométriquement sur Σ.

* ρ préserve la distance $d(C, \cdot)$ à C.

<u>Application</u>: Chaque Σ est un sous-complexe <u>convexe</u> de Δ
(i.e toute galerie minimale d'extrémités dans Σ est incluse dans Σ)

<u>Démo</u>: $\Gamma = (C = C_0, C_1, \dots, C_N = D)$ galerie minimale pour $C, D \in \Sigma$

supposons $\exists\, i$ tq $C_i \notin \Sigma$, avec $C_{i-1} \in \Sigma$.
prendre E une chb de Σ, adjacente à C_{i-1} via $C_{i-1} \cap C_i$.

$\rho_{\Sigma,E}(C_i) = C_{i-1}$ car ρ préserve la distance

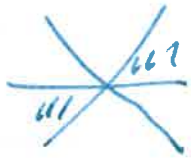
$\Rightarrow \rho_{\Sigma,E}(\Gamma)$ a une répétition
$\Rightarrow d(C,D) < N$. Absurde. $\square$

Déf 2: Un immeuble Δ est dit <u>sphérique</u> si son groupe de Coxeter W est un gp fini.

Soit $C, D \in \Delta$.
Soit $\Sigma \in \mathcal{A}$ tq $C, D \in \Sigma$
$\Rightarrow d(C,D) \underset{(c)}{=} d_\Sigma(C,D) \leq d_\Sigma(C,-C) = \# \mathcal{H}$
$= \operatorname{diam} \Delta$.

$\mathcal{H}$: système W-inv d'hyper-plans dans V

Déf 3: $C, C' \in \Delta$ chambres. C et C' sont <u>opposées</u> si $d(C,C') = \operatorname{diam} \Delta$.



Lemme 4: Supposons $C, C' \in \Delta$ opposées.
Soit $\Sigma \in \mathcal{A}$ tq $C, C' \in \Sigma$.
Alors l'enveloppe convexe de C et C' est Σ.

Démo:
- $\operatorname{conv\,hull}_\Delta(C,C') \subset \Sigma$ car Σ est convexe
- Si $D \in \Sigma$, il existe une galerie minimale Γ $C \rightsquigarrow C'$ dans Σ qui passe par D (exposé I)
- Γ est minimale dans $\Delta \Rightarrow \Gamma \subset \operatorname{conv\,hull}_\Delta(C,C')$
$\Rightarrow D \in \operatorname{conv\,hull}_\Delta(C,C')$. $\square$

Thm 5: Un immeuble sphérique Δ a un système d'appartements unique.
Les apartements sont les enveloppes convexes des paires de chambres opposées.

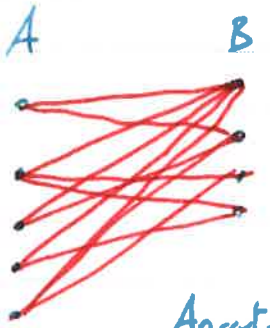
Démo: Soit $\mathcal{A}$ un système quelconque.
Soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble des enveloppes convexes pour les paires de chbs opposées.

Si $\Sigma \in \mathcal{A}$, on choisit $C, C' \in \Sigma$ opposées, on a $\Sigma = \operatorname{conv\,hull}_\Delta(C,C') \in \mathcal{A}'$

Si $\Sigma \in \mathcal{A}'$, soit $\Sigma \ni C, C'$ $\Sigma = \operatorname{conv\,hull}_\Delta(C,C')$, $\exists\, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ tq $\Sigma_2 \supset C, C'$
$\Rightarrow \Sigma_2 \supset \Sigma$
$\Rightarrow \Sigma_2 = \Sigma \in \mathcal{A}'$.

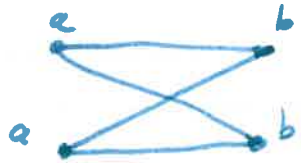
Exemple :

A, B deux ensembles avec $\# A, \# B \geq 2$



$\mathcal{G}_{A,B}$ = Graphe bipartite sur A et B

Apartements



cloisons : sommets

Coxeter $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$= A_1 \times A_1$

× (B0) (B1) sont triviales
× (B2) se vérifie à la main.

$\mathcal{G}$

Exemples.

Δ_E ←

E un ensemble
Apartements : paire de points
Coxeter : $A_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Chb : point
cloison : $\emptyset$
$\forall x, y \in \Delta$, x est $\bar{=}$ adjacent à y.

Rq : $\Delta = \mathcal{G}_{A,B} = \text{Join}(\Delta_A, \Delta_B)$