Tobias Schmidt

Immeubles Sphériques I

I. Rappels: sur les gp de Coxeter finis

1. La représentation canonique

Soit W un gp, $S \subset W$ un ensemble fini de générateurs (W, S) s'appelle un groupe de Coxeter si W admet une présentation:

$$\langle S : (st)^{m(s,t)} = 1 \rangle$$

ou $m(s,t) = \mathrm{ord}(st)$ et $m(s,s) = 1$.
Donc, il y a exactement une relation pour chaque pair s, t avec $\mathrm{ord}(s,t) < \infty$.

Soit $V = \mathbb{R}^S$, $\{e_s\}_{s \in S}$

$B(e_s, e_t) := -\cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right)$ forme bilinéaire symétrique

$B(e_s, e_s) = 1$, $B(e_s, e_t) \in [-1, 0]$ $2 \leq m(s,t) \leq \infty$

Soit $\sigma_s(x) = x - 2B(e_s, x)\, e_s$ reflexion orthogonal à $e_s^\perp$ (orthogonal par rapport à B)

Thm: $s \longmapsto \sigma_s$ induit une représentation $W \hookrightarrow GL(V)$ qui est fidèle et d'image discrète.

Rep dual : $W \longrightarrow GL(V^*)$, $\langle w v^*, v \rangle = \langle v^*, w^{-1} v \rangle$
$\forall v^* \in V^*, \ v \in V$

Soit $e_s^\vee = 2B(e_s, \cdot) \in V^*$
$s(x) = x - \langle e_s^\vee, x \rangle e_s$, $\forall x \in V$
$s(v^*) = v^* - \langle v^*, e_s \rangle e_s^\vee$, $s \rightsquigarrow V^*$ comme réflexion à $H_s := \{ \langle \cdot, e_s \rangle = 0 \}$

$C \subset V^*$ le cône defini par $\langle \cdot, e_s \rangle > 0, \forall s \in S$
$\longleftrightarrow$ la chambre fondamentale

Ses murs sont les H_s. Les vecteurs $w e_s \in V \rightsquigarrow$ racines
Les hyperplans $w H_s \subset V^* \rightsquigarrow$ Murs
Les cônes $wC \subset V^* \rightsquigarrow$ Chambres

On a une bijection $W \xrightarrow{\sim} \{\text{chambres}\}$
$w \longmapsto wC$

Idée : $\ell(sw) < \ell(w) \Rightarrow H_s$ sépare C et wC.

Déf : (W, S) s'appelle sphérique si $|W| < \infty$.

Exemples : Gps diédraux D_{2m}
Isom des polyèdres réguliers
Gp de Weyl

Prop 1 : (W, S) sphérique $\Leftrightarrow$ B définie positive

Démo : "$\Leftarrow$" $\underset{\text{discret}}{W} \subset \underbrace{O(B)}_{\text{compact}}$.

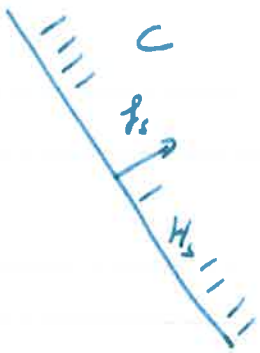
"$\Rightarrow$" $V_1 := V^*$, $W \xhookrightarrow{\sigma} GL(V_1)$

$(\cdot,\cdot)_W$ prod. scalaire W-invariant sur V_1

$$(x,y)_W := \sum_{w \in W} (wx, wy)$$

$$V_1(s)^+ = \{ s(v^*) = v^* \} = H_s \qquad V_1^+(s) \perp V_1^-(s)$$
$$V_1(s)^- = \{ s(v^*) = -v^* \}$$

Soit $f_s \in H_s^\perp$ unitaire tq :



$$s(x) = x - 2(f_s, x)_W f_s$$

et $$(f_s, f_t)_W = -\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{ord}(\sigma_s \sigma_t)}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right)$$

$\Rightarrow$ $B = (\cdot,\cdot)_W$ $\Rightarrow$ B est définie positive. $\square$

2. Complexes sphériques

V espace euclidien, $(\cdot,\cdot)$, $n = \dim V$

$\mathcal{H}$ collection finie d'hyperplans, $H \in \mathcal{H}$, $s_H : V \to V$ réflexion ortho.

W = gp fini $= \langle s_H : H \in \mathcal{H} \rangle$

Hyp : • $V^W = \{0\}$.

• $\mathcal{H}$ est W-stable.

$\therefore$ $\exists$ base $e_1, \dots, e_n$ tq : $C = \{ \sum_i \lambda_i e_i : \lambda_i > 0, \cancel{\sum \lambda_i = 1} \}$

est une composante connexe de $V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$.

:: W engendré par les n réflexions aux hyperplans de C.

Une <u>cellule</u> $A \subset V$ est une sous-partie $A \neq \emptyset$ de V donné par $A = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \mathcal{U}_H^A$,

$$\mathcal{U}_H^A = \{ H, H^+, H^- \}$$

comp° connexe de $V \setminus H$

Les cellules $\forall C$ sont les <u>chambres</u>.
Le support $\operatorname{supp}(A) = \bigcap_{\mathcal{U}_A^H = H} H$.

$\dim A = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{supp}(A)$.

Soit Σ l'ensemble des cellules.

Déf: Soient D, D' deux chambres.
La <u>distance</u> $d(D,D') = \# \{ H \in \mathcal{H} : H \text{ sépare } D \text{ et } D' \}$
Une galerie (min.) D à D' est une suite $D = D_0, D_1, \dots, D_N = D'$, D_i chambre
D_i et D_{i+1} sont adjacentes (i.e $d(D_i, D_{i+1}) = 1$)

(tq $N = d(D, D')$).

Prop 2: Soit D chambre. Il existe une unique chb D' qui maximise la distance $d(D, D') = \# \mathcal{H}$.
D' est la <u>chambre opposée</u> $\rightsquigarrow D' = -D$.

Coro 3: Soient D, D' deux chbs.
$\boxed{\text{Il existe une gallerie minimale } D \rightsquigarrow -D \text{ qui passe par } D'.}$

Démo: $H \in \mathcal{H}$ sépare D' et D ou $-D$ et D' mais pas les deux. Donc la concaténation d'une gallerie $D \rightsquigarrow D' \rightsquigarrow -D$ est de longueur $\# \mathcal{H}$ donc minimale.

L'ensemble Σ est partiellement ordonnée (poset) via $A \subset B$ si A face de B ($\bar{A} \subset \bar{B}$)

Déf: Un <u>complexe simplicial</u> avec ensemble de sommets V est un sous-ensemble Δ de sous-parties $\subset V$ (<u>les simplexes</u>)

tq:

a) $\{v\} \in \Delta$
b) Une sous-partie d'un simplexe est un simplexe. ($\emptyset \in \Delta$)

$A \in \Delta$

$$|A| := \{ \sum_{v \in A} \lambda_v v \ : \ \lambda_v > 0, \ \sum \lambda_v = 1 \} \subset \mathbb{R}^V$$

$$|\Delta| = \bigcup_{A \in \Delta} |A| \subset \mathbb{R}^V \qquad \text{compact si } \# V < \infty$$

<u>La réalisation topologique</u> de Δ.

Prop 4: Σ est simplicial et $|\Sigma| \underset{\text{homéo}}{\simeq} \{ v \in V \mid \|v\| = 1 \}$

Démo: Si $A \in \Sigma$, $\dim A = 1$, $A = \mathbb{R}_{>0} \cdot v$ avec $\|v\| = 1$.

$V := \{ v \in V : \|v\| = 1 \text{ tq } \mathbb{R}_{>0} \cdot v \text{ est une cellule de } \Sigma \}$

Plus généralement, $A \in \Sigma$, $\dim A = q+1$ $\quad q \geq -1$

$\rightsquigarrow$ $\{v_0, \dots, v_q\}$ vecteurs unitaires dans les faces $A' \subset A$.

(On utilise que l'action de W sur les chambres de Σ est transitive)

$$\Sigma \underset{\leq}{\hookrightarrow} \Delta(V)$$

Donc Σ est simplicial. On a une application

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^V \longrightarrow V \qquad \text{linéaire, continue}$$
$$e_v \longmapsto v$$

$$\tilde{f}(|A|) = \left\{ \sum_{v \in A} \lambda_v v \ : \ \lambda_v > 0, \ \sum \lambda_v = 1 \right\} \subset V$$

$$\tilde{f}\big|_{|\Sigma|} : |\Sigma| \longrightarrow V \setminus \{0\} \longrightarrow S^{\dim V - 1}$$
$$w \longmapsto \frac{w}{\|w\|}$$

$$f$$

<u>Claim</u>: f est bijective.

<u>Preuve</u>: • $f(|A|) = A \cap S^{\dim V - 1}$

$\Rightarrow$ f est surjective car $V = \bigsqcup_{A \in \Sigma} A$

• $f|_{|A|}$ injective $\Rightarrow$ f injective car $x \in |A|$, $y \in |B|$, $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\therefore$ $f|_{|A|}$ injective : $x = \sum \lambda_v^x v$, $y = \sum \lambda_v^y v$ et $\sum \frac{\lambda_v^x}{\|x\|} v = \sum \frac{\lambda_v^y}{\|y\|} v$

les v sont linéairement indépendants car dans A $\Rightarrow$ $\frac{\lambda_v^x}{\|x\|} = \frac{\lambda_v^y}{\|y\|}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\|x\|} = \frac{1}{\|y\|}$ $\Rightarrow$ $\lambda_v^x = \lambda_v^y, \forall v$