Groupes algébriques réductifs IV

Matthieu
9/05/17

Ex: Si $G = GL_n$, $T = D_n$

$$N(T) = \{ \text{mat monomiales} \}$$
$$= \{ (a_{ij}) \mid \text{avec un seul coeff} \neq 0 \text{ dans chaque ligne et chaque colonne} \}$$
$$\simeq D_n \rtimes \mathfrak{S}_n$$

W agit sur T par conjugaison fidèlement.

Théo: $(k = \bar{k})$ (G alg connexe, pas nécessai° réductif)
Si $T \subset G$ tore maximal, $W = W(T)$ agit (par conj) simplement transitivement sur l'ensemble

$$\mathcal{B}^T = \{ \text{Borels } B \text{ fixes sous } T \}$$
$$= \{ \text{Borels } B \text{ qui} \supset T \}$$

Démo: × Si $B \supset T$ alors $\forall t \in T$, $tBt^{-1} = B$

Récip: si $tBt^{-1} = B$ $(\forall t \in T)$

alors $t \in N_G(B) \underset{\text{(Chevalley)}}{=} B$

× $Z_G(T) = T$ agit triv° sur les B qui le contiennent.

$\Rightarrow W$ agit.

× Action transitive: $B_1, B_2 \supset T$

Conjugaison des Borels $\Rightarrow \exists g \in G$ tq $gB_1g^{-1} = B_2$

Alors T et gTg^{-1} sont inclus dans B_2, donc conjugués dans B_2.

$$\Rightarrow gTg^{-1} = bTb^{-1} \quad \text{pour un } b \in B_2$$

Alors $nTn^{-1} = T$ avec $n = b^{-1}g \in N_G(T)$

Donc, $B_2 = g\, B_1\, g^{-1} = n\, B_1\, n^{-1}$

<u>Stabilisateur de $B \in \mathcal{B}^T$</u> (Action <u>simplement</u> transitive)

Soit $n \in N(T)$ tq $nBn^{-1} = B$

Alors $n \in N_G(B) \underset{\text{(Chevalley)}}{=} B$

On écrit $\underset{n}{B} = \underset{(u,t)}{U \rtimes T}$

~~d'où son isomorphisme:~~

~~$\alpha : T \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/U$~~

~~commutatif~~

Pour tout $t \in T$, on a:

$n t n^{-1} = t^{\alpha} \in T$

$\underset{T}{\underset{\nearrow}{n t n^{-1}}} = t\, \underbrace{(t^{-1} u t)}_{u' \in U}\, u^{-1}$

$\Rightarrow u' u^{-1} \in U \cap T \Rightarrow u' = u \Rightarrow n t n^{-1} = t$

$\Rightarrow n \in Z_G(T)$ □

13. Groupes réductifs de rg s-s = 1

G connexe réductif, T tore max, $W = W(T)$

<u>Thm:</u> $(k = \bar{k})$ LCSSE

1) le rang semi-simple de G est 1

(i.e: dim tore max de $G^{ss} = G/R(G) = 1$)

2) $\mathrm{Card}(W) = 2$

Exemples : GL_2, SL_2, PGL_2

$$\begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$

Dém : (seulement i) $\Rightarrow$ ii))

Démo de $W = W'$

On note $\pi : G \longrightarrow G' = G/R(G)$ le quotient ss de G

Le groupe $T' = \pi(T)$ est un tore (quotient d'un tore)

De plus, $R(G)$ est un tore car G est réductif.

$\pi^{-1}(T')$ est un tore $\supset T$ donc $= T$ par maximalité

Même argument $\Rightarrow$ $T' \subset G'$ tore maximal.

On en déduit (exo) $N_G(T)/T \xrightarrow{\sim} N_{G'}(T')/T'$

i.e $W' = W$

$\Rightarrow$ OPS G semi-simple.

Donc $W \hookrightarrow \mathrm{Aut}(T) = \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Reste à montrer que $\underset{\mathrm{card}(\mathcal{B}^T)}{\underset{\parallel}{\#W}} \geq 2$.

On choisit un plongement $\underset{G/B_0}{\underset{\wr}{\mathcal{B}}} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$

avec V muni d'une action de T.

Rq: Comme G n'est pas résoluble, on a
$$\dim(\mathcal{B}) = \dim(G/B_0) \geq 1.$$

Il suffit donc de montrer :
Une action d'un tore $T \simeq \mathbb{G}_m$ plongé dans $\mathbb{P}(V)$ possède au moins $d+1$ pts fixes sur toute variété T-préservée fermée $Y \subset \mathbb{P}(V)$ de dim d

Rq. Du coup avec $Y = G/B_0$, on obtient $\mathrm{card}(\mathcal{B}^T) \geq 2$.

Preuve: OPS Y irréductible car
T connexe stabilise les compo° irréd

Récu sur d: $\underline{d=0}$: $Y = (pt)$ ✓

$\underline{d \geq 1}$: quitte à remplacer V par l'intersection des hyperplans T-stables $H \subset \mathbb{P}(V)$ qui contiennent Y, ops Y inclus dans aucun hyperplan.

Soit $e_1, \dots, e_n$ base de V qui diagonalise l'action de T :

Si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ alors $t v = \sum_{i=1}^{n} t^{m_i} a_i e_i$ $(T = \mathbb{G}_m)$
$m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$

OPS $m_1 = m_2 = \dots = m_r < m_{r+1} \leq \dots \leq m_n$

Soit $H = \{a_1 = 0\}$, $\exists\, x \in Y \setminus H$ $\left[\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right] = v' \neq 0$
$x = [v]$

le pt $v' = \lim_{t \to 0} [tv] = \lim_{t \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} t^{m_i - m_1} a_i e_i\right]$

$[v'] \in Y$ car Y est fermée, T-stable, et appartient à $\mathbb{P}(V) \setminus H$. et est fixe sous T.

Par ailleurs $Y \cap H$ est de dim $d-1$ donc contient $\geq d$ pts fixes sous T par récurrence

$\square$

<u>Rem:</u> Si $B \subset G$ est un Borel, en travaillant un peu + on montre que $G/B = \mathbb{P}^1$

(difficulté principale $\dim G/B = 1$)

(dim 1, lisse, connexe, projectif, contenant une orbite ouverte de $\mathbb{G}_m$ $\Downarrow$ rationnelle)

($\Rightarrow$ $G/B = \mathbb{P}^1$)

L'action de G sur $G/B \simeq \mathbb{P}^1$ donne un morphisme surjectif à noyau fini :

$$G \twoheadrightarrow PGL_2$$

où l'on voit que $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

14. Groupes réductifs quelconques

G connexe réductif
$T \in G$ tore maximal

$\Phi \subset X(T)$ ens des racines

$W = W(T, G)$

$\alpha \in \Phi$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$

Thm 1: Soit $T_\alpha = (\ker \alpha)^\circ$ et $G_\alpha = Z_G(T_\alpha)$

Alors G_α est un groupe réductif de rang semisimple 1. Les groupes de Weyl $W(G_\alpha, T_\alpha)$ engendrent W.

Thm 2: 1) Il existe un unique sous-groupe $U_\alpha \subset G_\alpha$ d'algèbre de Lie : $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$, isomorphe à $\mathbb{G}_a$ et normalisé par T

~~On peut choisir l'isom $U_\alpha \simeq \mathbb{G}_a$ tel que~~

l'action de T sur U_α soit donnée par

$t \cdot x = \alpha(t)\, x$

2) Il existe un morphisme de groupes

$$\varphi_\alpha : SL_2 \longrightarrow G_\alpha \subset G$$ qui envoie

le tore diagonale D dans T,

et les sous groupes unipotents supérieurs, inférieurs $U_\pm \subset SL_2$ dans $U_{\pm\alpha}$

Dessin:

$$U_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; * \in k \right\}$$

i

j

$$G_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} * & & & \\ & \circledcirc & * & \\ & * & \circledcirc & \\ & & & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$T_\alpha = \left\{ \begin{matrix} \circledcirc & & \\ & \circledcirc & \\ & & \circledcirc \end{matrix} \right\}$$

Introduisons :

- $X^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ groupes des cocaractères ou sous-groupe à 1-paramètre

- la dualité parfaite :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \longrightarrow \mathbb{Z} = \mathrm{End}(\mathbb{G}_m)$$
$$(x, \lambda) \longmapsto x \circ \lambda$$

- Les coracines $\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \longrightarrow G$

$$\alpha^\vee(c) = \varphi_\alpha \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

- $\Phi^\vee \subset X^\vee$, l'ensemble des coracines

- $s_\alpha : X \longrightarrow X$, $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$

réflexion d'hyperplan fixe $(\alpha^\vee)^\perp$

<u>Thm 3</u>: Le quadruplet $R = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ est une <u>donnée radicielle abstraite</u>

permet de classifier les groupes réductifs sur un anneau qcq.

- $X, X^\vee$ deux groupes abéliens libres de rang fini munis d'une dualité parfaite $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- $\Phi \subset X \setminus \{0\}$, $\Phi^\vee \subset X^\vee \setminus \{0\}$ deux sous-ensembles finis stables par $x \mapsto -x$.

- Il existe une bij $\Phi \longrightarrow \Phi^\vee$ tq $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$
  $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$
- Φ (resp. $\Phi^\vee$) est stable par les s_α (resp. $s_{\alpha^\vee}$).

Cette donnée est <u>réduite</u> lorsque $\mathbb{Q}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

<u>Récipt:</u> Tout donnée radicielle réduite détermine une paire (G, T) composée d'un groupe réductif G et un tore maximale T unique à conjugaison par le tore près. ☒

<u>Rem:</u> Si S désigne l'ens° formé par les éléments d'ordre 2 dans les $W(T_\alpha, G_\alpha)$ alors la paire (W, S) est un groupe de Coxeter. Sa représentation canonique est la représentation dans $V := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.