GdT : Immeubles de Tits

7. Tores (M. Romagny)

k fixé ~~un~~ corps

$G_{/k}$ est un <u>tore</u> si $G_{\bar{k}} \simeq \mathbb{G}_{m,\bar{k}}^{n}$.

Le <u>gpe des caractères</u> de G est $X(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$

<u>Ex</u> : · $G = (\mathbb{G}_m)^n$

Un caractère est $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ tq $\chi(tu) = \chi(t)\chi(u)$

où $\chi(T) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots\alpha_n)} \chi_\alpha T^\alpha \in k[T_1^{\pm 1}, \dots T_n^{\pm 1}]$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \chi(T) = T^\beta = T_1^{\beta_1} \dots T_n^{\beta_n}$

~~Donc~~ Donc $X(G) \simeq \mathbb{Z}^n$

$\chi = \chi_\beta \mapsto \beta$

<u>Rq</u> : · si $k = \bar{k}$, $X : \{\text{tores}\} \longrightarrow \{\text{Gpes ab. t. f. libres}\}$ est une équiv. de catégories.

· si $G = S^1$ le $\mathbb{R}$-tore non-déployé, l'objet qui le détermine est $X(G_{\bar{k}}) = X(\mathbb{R}^\times) = \mathbb{Z}$ avec action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par inversion.

Si V est une k-repr. linéaire de dim finie de G et $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ est un caractère, on note

$V_\chi = \{v \in V \,;\, g \cdot v = \chi(g) \cdot v \quad \forall g \in G\}$

le <u>χ-esp. propre</u> de G sur V.

Si ~~V_χ~~ $V_\chi \neq 0$, on dit que χ est un <u>poids</u> de la rep.

Thm (de diagonalisabilité des tores) : Pour toute rep. lin. ~~de~~ V d'un tore <u>déployé</u> $G = (\mathbb{G}_m)^n$, l'application

$$\bigoplus_{\chi \in X(G)} V_\chi \longrightarrow V$$

est un isomorphisme.

Preuve : du cas $G = \mathbb{G}_m$: la rep. est donnée par

$$\rho : \mathbb{G}_m \longrightarrow GL(V) \simeq GL_{n,k}$$
$$t \longmapsto M(t) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ \text{finie}}} M_i t^i \quad \hookrightarrow \in M_n(k)$$

tq $M(tu) = M(t)M(u)$

$$\sum M_i t^i u^i = \sum M_j t^j \sum M_k u^k = \sum M_j M_k t^j u^k$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{si } j \neq k \quad M_j M_k = 0 \\ \quad \text{si } j = k \quad M_i^2 = M_i \end{array}\right\} \Rightarrow \text{les } M_i \text{ sont les projecteurs sur la décomp.}$$

(et $\rho(1) = 1 \Rightarrow \sum M_i = I$)

$$V = \bigoplus V_i \qquad V_i = M_i V$$

Si $v \in V_i$, $v \in M_i V$ $v = M_i w$

$$M(t) \cdot v = \left(\sum M_j t^j\right) v = \sum t^j M_j M_i w = t^i M_i^2 w = t^i v$$
$$= \chi(t) \cdot v$$

avec $\chi(t) = t^i$

$\square$

<u>Ex</u> : G/k gpe alg. qcq
$\cup$
T tore déployé

On dispose de l'action adjointe

$$ad : T \subset G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

$$\left[k[\varepsilon] := k[X]/(X^2) \right.$$

$$\mathfrak{g} := Lie(G) = \ker\left(G(k[\varepsilon]) \longrightarrow G(k) \right)$$

$$\underset{\text{si } G \subset GL_n}{=} \{ M = I + \varepsilon H \in GL_n(k[\varepsilon]) \mid M \text{ satisfait les éq. poly. qui définissent } G \pmod{\varepsilon^2} \}$$

On note $\Phi = \Phi(T, G)$ l'~~ensemble~~ ensemble des poids de cette repr., appelés <u>racines</u>

$\alpha \in \Phi \subset X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}^n$

Donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$

où $\mathfrak{g}_0 = \{ v \in \mathfrak{g} \mid tv = 0 \ \forall t \in T \} \supset$ esp. tang à T

Ex: $G = GL_n \supset T = \{$mat. diagonales$\}$

$M = (m_{ij}) \in M_n k$ est vect. propre pour $\alpha \in X(T)$ ssi

$t \cdot M \cdot t^{-1} = \alpha(t) M \qquad \forall t = \mathrm{diag}(c_1, \dots c_n)$

$c_i c_j^{-1} m_{ij} = \alpha(t) m_{ij} \quad \forall i, j$

On voit que $\alpha(c_1, \dots c_n) = c_i c_j^{-1}$ est un poids, avec espace propre

$\mathfrak{g}_\alpha = k \cdot E_{i,j}$ (droite) et $\mathfrak{g}_0 = \{$matrices diag.$\}$

$n(n-1)$ en nombre

(par autom. de gpe alg.)

Thm (de rigidité des tores): toute action V d'un gpe alg. connexe sur un tore est triviale

Dém (avec $k = \bar{k}$): $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{k\text{-Gr. alg}}(T) = \mathrm{Aut}(X(T)) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n) = GL_n(\mathbb{Z})$

GAb. libre t.f.

équiv. de cat. discret

$\square$

8. Groupes unipotents

G/k est unipotent si toute rep. lin $V \neq 0$ a des vecteurs fixes $\neq 0$.

Ex: · $\mathbb{G}_a$ est unipotent

Une rep. lin. est donnée par $\rho : \mathbb{G}_a \longrightarrow GL(V) \cong GL_{n,k}$

$t \longmapsto M(t)$

$M(t) \in GL(k[t]) \quad M = \sum_{i \in \mathbb{N}} M_i t^i$ finie

tq $M(t+u) = M(t) \cdot M(u)$

$$\sum M_i (t+u)^i = \left(\sum M_j t^j\right)\left(\sum M_k u^k\right) = \sum M_j M_k t^j u^k$$

$$\sum_i M_i \sum_j \binom{i}{j} t^j u^{i-j} = \sum_{j,k} M_{j+k} \binom{j+k}{j} t^j u^k$$

d'où $\binom{j+k}{j} M_{j+k} = M_j M_k \quad \forall j,k$

Si car $(k) = 0 \implies (j!) M_j = (M_1)^j$ par récurrence

Donc en part. M_1 est nilpotente, soit $r \leq p = \text{car}(k)$ éventuellement l'indice.

~~$M = \exp(M_1) =$~~

$$M(t) = \exp(tM_1) = I + tM_1 + \frac{t^2}{2} M_1^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} M_1^{r-1}$$

$V_{r-1} = M_1^{r-1} V \neq 0$ et $v \in V_{r-1} \implies Mv = v$

- tout sous-groupe de $U_{n,k} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est unipotent.

[Idée : on part avec l'élément en haut à droite ;
lemme : c'est $\mathbb{G}_a$ ou 0. Si c'est $\mathbb{G}_a$, réc., c'est distingué et ok. Sinon on cherche des $\mathbb{G}_a$ ailleurs.
]

Réciproquement, tout gpe unipotent se plonge dans $U_{n,k}$.

⚠ En car. 0 les unip. sont connexes, tandis que $G = \{ X(X-1)\dots(X-(p-1)) \} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est unip. non connexe en caract. p.

$\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9. Groupes résolubles $(k = \bar{k})$

G/k est résoluble s'il admet une suite de composition

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_r = 1$$

tq les G_i / G_{i+1} sont abéliens.

Ex : - tout gpe alg. commutatif
- groupes unipotents (ext. successive de $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

<u>Thm</u> (du point fixe de Borel) : $k = \bar{k}$; un groupe résoluble connexe G agissant sur une var. proj. (éventuellement singulière, non-connexe) possède ≥ 1 point fixe.

Preuve : réc. sur $d = \dim(G)$ $d = 0$ $G = \{1\}$ ✓

$d > 0$ le gpe dérivé $N = (G, G) = \bigcap_{\substack{H \triangleleft G \\ G/H \text{ comm.}}} H$ (en fait int. finie)

est connexe (car engendré par des copies de G)

de $\dim < d$ car $\subsetneq G_1$ et (G connexe $\Rightarrow \dim G_1 < \dim G$)

Par réc. la var. $F = X^N \underset{\text{fermé}}{\subset} X \subset \mathbb{P}^N$ est <u>non-vide</u> (et proj.)

De plus, $N \triangleleft G \Rightarrow F$ est G-stable

Soit $x \in F$ dont la G-orbite est de dim. minimale

$\Rightarrow$ fermée (sinon on prend la frontière, qui est recouverte par des orbites)

Donc $G \cdot x \subset F$ est proj.

Le stabilisateur de G_x contient N, donc est distingué (th. des gpes)

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x$$

gpe alg. affine connexe — car quotient d'un gpe alg. affine par un s-gpe distingué est affine

$G \cdot x$ proj. $\Rightarrow$ c'est le point

$\Rightarrow G_x = G$ □