GdT : Immeubles de Tits | (Matthieu Romagny)

Séance 6 : Groupes algébriques réductifs

1. Introduction

Réf : Borel "Linear alg. groups"

Objectifs :
- tores maximaux T
- normalisateurs N
- ss-gpe de Borel B
- gpe de Weyl $W = N/T$
- montrer que W est un gpe de Coxeter

Rem : 1) ⚠ Si G gpe de Lie$/\mathbb{C}$, $\exists$ théorie de la réductivité pour $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Certains disent que G est réductif si $\mathfrak{g}$ l'est.
P. ex. $\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$ et $\mathbb{G}_m = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ont la $\hat{m}$ alg. de Lie $\mathfrak{g} = (\mathbb{C}, [\,;\,] = 0)$ (réductive).
Pour la notion de réductivité plus fte que nous allons introduire, seul $\mathbb{G}_m$ sera réductif.
2) On est intéressé par k qcq, mais rapidement on fera $k = \bar{k}$.

2. Groupes algébriques

k corps ;

Déf : un k-gpe algébrique (affine) est une var. alg. affine lisse G/k munie d'une mult. $m : G \times G \to G$ et d'un el. neutre $1 \in G$ (+ axiomes).

Var alg. affine : $G = V(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}^n_k$

Lisse : la jac. $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ est de rang maximal au pt 1.

Un thm de Cartier dit que c'est automatique en car 0
En car p : μ_p défini par $x^p - 1$ dans $\mathbb{A}^1_k$ (un point multiple)
(images et quotients de gpes lisses sont lisses, mais pas nécessaires ex. : Frobenius)

~~Ex~~

Ex : • $SL_{2,k} \in \mathbb{A}^4_k$
$\| \{ \det - 1 = 0 \}$

• $GL_{2,k} \subseteq \mathbb{A}^5_k$ coord. a, b, c, d, x
équation $x \cdot \det - 1$
Anneau $k[a,b,c,d,x] / x \cdot \det - 1 \cong k[a,b,c,d, \frac{1}{\det}]$

• $GL_{n,k}$; $GL_{1,k} = \mathbb{G}_{m,k}$

• $\mathbb{G}_{a,k} = \mathbb{A}^1_k$ avec addition

• gpes finis

3. Algèbres de fonctions

G gpe alg. aff. $/k$
Son <u>algèbre de fonctions</u> est

$$k[G] = k[x_1, \dots x_n] / (f_1, \dots f_n)$$

munie d'un morphisme de k-algèbre ("comultiplication")

$$m^\# : k[G] \longrightarrow k[G] \otimes k[G] = k[G \times G]$$
$$\text{"} u \longmapsto u \circ m \text{"}$$

et d'un autre morphisme

$$1^\# : k[G] \longrightarrow k$$
$$\text{"} u \longmapsto u(1) \text{"}$$

(et d'une "coinversion") + axiomes

Ex : • $G = \mathbb{G}_{a,k}$: $k[G] = k[x]$

$$k[G] \otimes_k k[G] = k[x] \otimes_k k[x] = k[x_1, x_2]$$

$$m^\# : k[x] \longrightarrow k[x_1, x_2] \qquad 1^\#(P) = P(0)$$
$$x \longmapsto x_1 + x_2$$

• $G = SL_{2,k}$ $\quad k[G] = k[a,b,c,d]/\det -1$

$m^\#$: $k[A,B,C,D]/AD-BC-1 \longrightarrow k[a,b,c,d,e,f,g,h]/(ad-bc-1, eh-fg-1)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow A \overset{m^\#}{\mapsto} ae+bg$ etc.

$1^\#(A) = 1$

$1^\#(B) = 0$ etc

Algèbre de Hopf = alg. munie d'une comultiplication etc

Nullstellensatz $\Rightarrow$ on a éq. de catégories

$$\begin{pmatrix} \text{gpes alg.} \\ \text{affines lisses} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left(\begin{matrix} k\text{-alg.} \\ \text{de Hopf} \end{matrix} \Big/ (A, m^\#) \right)$$

lisse

$$G \longmapsto k[G]$$

Ceci signifie deux choses :

1) $\exists$ un foncteur quasi-inverse qui permet de reconstruire G (à isom. près) à partir de $A = k[G]$:

NSS, dans le cas $k = \bar{k}$, montre que les idéaux max. de $k[x_1, \dots x_n]$ (resp. $k[x_1, \dots x_n]/(f_1, \dots f_m)$) sont tous de la forme $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ (resp. $(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n)$ pour $(a_1, \dots a_n)$ ~~racine~~ solutions des f_i)

$\rightsquigarrow$ G = ens. des idéaux max. de $A = k[G]$

Mult : $(x,y) \in G \times G \rightsquigarrow I = I_{(x,y)} \subset k[G \times G] \simeq k[G] \otimes k[G]$

$m(x,y) := (m^\#)^{-1}(I)$

2) Pour G_1, G_2 gpes alg. affines $/k$, l'application

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\substack{k\text{-alg} \\ \text{Hopf}}}(k[G_2], k[G_1])$$

est bijective

4. Points rationnels

G/k comme avant

Pour toute extension de corps K/k, l'ensemble

$$G(K) = \{ x \in K^n \mid f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \}$$

est un gpe abstrait appelé le <u>gpe des pts k-rationnels de G</u>.

Si $G = \mu_p$ sur $\mathbb{F}_p$, $G(K) = \{*\}$ $\forall K/\mathbb{F}_p$

~~f morphisme de~~

$f : G \to H$ morph. de gpes alg $\rightsquigarrow$ $f(K) : G(K) \to H(K)$ morph. de gpes

On dit qu'un morphisme $f : G \to H$ de gpes alg$/k$ est <u>inj. / surj.</u> ssi $f(\bar{k}) : G(\bar{k}) \to H(\bar{k})$ l'est

<u>Ex</u> : • $f : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$
$x \longmapsto x^2$

Surj ? $f(\mathbb{C}) : x \mapsto x^2$ surj. $\Rightarrow$ oui ; non inj.

Mais $f(\mathbb{R})$ ~~pas~~ non surj., non inj.

• $f : \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ surj., non inj
$x \longmapsto x^3$

Mais $f(\mathbb{Q})$ non surj., inj.

<u>Rq</u> : 1) $f : G \to H$ ~~surj~~ surj. $\iff$ $f^\# : k[H] \to k[G]$ inj.

(si car $k = 0$, " inj $\iff$ " surj)

2) si car $(k) = p$

$F : \mathbb{G}_{a,k} \longrightarrow \mathbb{G}_{a,k}$
$x \longmapsto x^p$

$F(\bar{k}) : \bar{k}^* \longrightarrow \bar{k}^*$ bijectif
$x \longmapsto x^p$

Mais $F^\# : k[t] \longrightarrow k[t]$ inj., non surj.
$P(t) \longmapsto P(t^p)$

5. Formes (tordues)

H = un nouveau k-gpe alg.

Déf : G est une formes de H si $G_{\bar{k}} \cong H_{\bar{k}}$ comme $\bar{k}$-groupe algébrique, où G_K = K-gpe alg. déf. par les éq. $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots x_n]$ (autrement dit : $k[G_K] := k[G] \otimes_k K$)

Ex : • $k = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ les formes de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ sont

- $G_1 = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$
- $G_2 \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ donné par x^2+y^2-1

$G_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \not\cong G_2(\mathbb{R}) = S^1 \implies G_1 \not\cong G_2$

$\mathbb{R}[t, \frac{1}{t}] \not\cong \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$

$$G_{2,\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} G_{1,\mathbb{C}}$$
$$(x,y) \longmapsto t = x+iy \quad \left(\frac{1}{t} = x - iy\right)$$

• Si $car(k) \neq 2$, les formes de $\mathbb{G}_{m,k}$ sont les $T_d \subseteq \mathbb{A}^2_k$ d'éq. $x^2 - dy^2 = 1$ (avec $d \in k^*$ fixé)

avec mult. $(x_1,y_1) \star (x_2,y_2) = (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

$$T_{d,\bar{k}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{m,\bar{k}}$$
$$x,y \longmapsto x + \sqrt{d}\cdot y$$

De plus, $T_d \simeq T_e$ ssi $d \cdot e$ est carré

(En car 2, $x^2 + dy^2 + xy$)

• Si $k = \mathbb{R}$, formes de $SL_{2,\mathbb{R}}$: — $G_1 = SL_{2,\mathbb{R}}$
— $G_2 = SU(2)$

• Formes de $PGL_{2,k}$: les $U/\mathbb{G}_m$ U = gpe des éléments inversibles dans une alg. de quaternions sur k

$$PGL_2 \hookrightarrow Aut(M_2) = GL_4$$
$$M \longmapsto \text{conj. par } M$$

6. Représentations

Déf : une <u>représentation</u> de G dans un k-e.v. de dim finie V est un morphisme ~~est~~ de k-gpes alg. $\rho : G \to GL(V)$.

Trois résultats fondamentaux :

1) $\exists$ une rep. <u>fidèle</u> ρ (i.e. ρ ~~injectif au sens des gpes algébriques~~ est une immersion fermée au sens géo. alg. (injective)) ~~même, G est un sous-gpe fermé~~

2) Si H est un sous-gpe fermé de G, $\exists$ une ~~immersion~~ rep. fidèle $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ dans laquelle H est le stabilisateur d'une droite
($\Rightarrow$ $G/H \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ loc^t fermé montre que G/H est une variété algébrique)

3) $H \triangleleft G \Rightarrow G/H$ affine et un k-gpe. alg. affine.

Idée pour (1) : $G \curvearrowright k[G]$, ~~stable~~ chaque orbite engendre un sous-esp. de dim. finie
car $\forall f$ $m^\#(f) = \sum_{\text{finie}} a_i \otimes b_i$ ...