GdT Immeubles de Tits

Séance 5 : Ludovic Marquis

5. Les sous-groupes spéciaux

Thm : 1) $I \subset S$

a. Le morphisme naturel $W_I \longrightarrow \underline{W_I}$ est un iso.

b. si $w = s_1 \cdots s_d$ est une écriture minimale et $w \in W_I$
$\Longrightarrow s_k \in I \quad \forall k$

c. $l_I = l$ sur W_I

d. $W_I \cap S = I$

2) S est un ensemble minimal de générateurs de W

3) L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(S) & \longrightarrow & \{\text{Sous-gpes spéciaux}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ I & \longmapsto & W_I \end{array}$$
est une bijection croissante, $W_{I \cup J} = \langle W_I, W_J \rangle$
$W_{I \cap J} = W_I \cap W_J$

4) $\forall w \in W$ on note $S_w = \bigcap_{\substack{I \subset S \\ w \in W_I}} I$; alors $w \in W_{S_w}$ et toute écriture minimale de w fait intervenir uniq^t les lettres de S_w

Preuve : 1)a.
$$\begin{tikzcd} \underline{W_I} (\leq W) \arrow[r, "\rho^W|_{\underline{W_I}}"] & GL(\mathbb{R}^I) \\ W_I \arrow[u] \arrow[ur, "\rho^{W_I}"'] & \end{tikzcd}$$
$\hookleftarrow$ stable par $\rho^W(\underline{W_I})$

ρ^{W_I} inj. $\Longrightarrow$ $W_I \to \underline{W_I}$ inj. $\Rightarrow$ $\Longrightarrow$ isom.
surj. par conste.

b. Récurrence sur $l(w)$

si $\ell(w)=0$ ok

soit $s_1 \cdots s_d$ mné écr. min. de w

$\ell(ws_d) < \ell(w) \overset{\text{lemme clé}}{\Longrightarrow} w(e_{s_d}) < 0$

$w \in W_I \Rightarrow w = t_1 \cdots t_q \quad t_i \in I$

$$w(e_{s_d}) = e_{s_d} + \sum_{k=1}^{q} c_k e_{t_k}$$

car $\rho_s(x) = x - 2B(e_s, x)e_s$

Mais $w(e_{s_d}) < 0 \Rightarrow s_d$ est l'un des $t_k \Rightarrow s_d \in I$

$\Rightarrow ws_d \in I$ et de long. $< \ell(w)$; par H.R. $s_k \in I \ \forall k$

c. oui

d. oui

2)

...

$\square$

Rappel : C_I = face ouverte de D

$= \bigcap_{s \in I} \underbrace{Z_s}_{= \operatorname{Ker}(\sigma_s - id)} \cap \bigcap_{w \notin I} A_w^+$

6. Le théorème de Tits

<u>Thm</u> (Tits) : W = gpe de Coxeter. On note

$$C_{Tits} = \bigcup_{w \in W} \sigma(w)(D) \qquad \left(D = \{f \in (\mathbb{R}^S)^* \mid f(e_s) \geq 0 \ \forall s\}\right)$$

1) La représentation $\sigma : W \longrightarrow GL(V^*)$ est fidèle

2) pour tout $I, J \subset S$, pour tout $w \in W$,

si $wC_I \cap C_J \neq \emptyset \Rightarrow I = J$ et $w \in W_I$.

En particulier, le stabilisateur de tout pt de C_I est W_I

3) D est un domaine fondamental strict pour l'action $W \curvearrowright C_{Tits}$

4) C_{Tits} est un cône convexe et tout segment de C_{Tits} ne rencontre qu'un # fini de $w(C_I)$ $(w \in W)$

5) L'espace $\mathcal{U} = \mathbb{S}(C_{Tits}) \subset \mathbb{S}(V)$ = demi-droites vecto. incluses dans C_{Tits} est un complexe simplicial dont les simplexes maximaux

tout les $\omega(\mathbb{S}(D))$ $\omega \in W$

6) W agit proprement sur $\mathbb{S}(\mathring{C}_{Tits})$ et $\sigma(W)$ est un sous-gpe discret de $GL(V^*)$

Preuve :

2) Récurrence sur $\ell(\omega)$

$\ell(\omega)=0$ ok

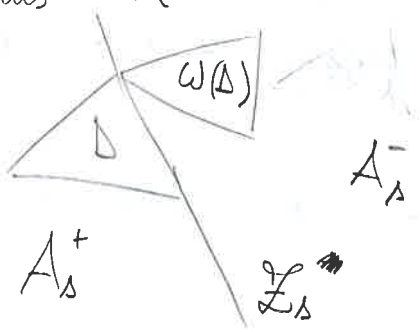
$\ell(\omega)>0 \Rightarrow \exists\, s \in S$ tq $\ell(s\omega) < \ell(\omega)$

Par interpr. géom. du lemme clé $\Rightarrow \omega(\mathring{D}) \in A_s^-$

$\Rightarrow \omega(D) \subset \overline{A_s^-}$

$\Rightarrow D \cap \omega(D) \subset \overline{A_s^+} \cap \overline{A_s^-} = Z_s$

Dans $\mathbb{S}(V^*)$



Donc $\omega C_I \cap C_J \subset Z_s$

Donc si $\omega C_I \cap C_J \neq \emptyset$, alors $C_J \cap Z_s \neq \emptyset$

$\Rightarrow s \in J$ (sinon $C_J \subset A_s^+$, disjoint de Z_s)

$\Rightarrow s C_J = C_J$

On a $s\omega C_I \cap C_J = s(\omega C_I \cap C_J) \neq \emptyset$

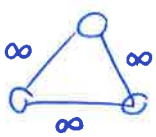
et $\ell(s\omega) < \ell(\omega) \overset{H.R.}{\Longrightarrow} I = J$, $\left.\begin{array}{l} s\omega \in W_I \\ s \in I = J \end{array}\right\} \Rightarrow \omega \in W_I$

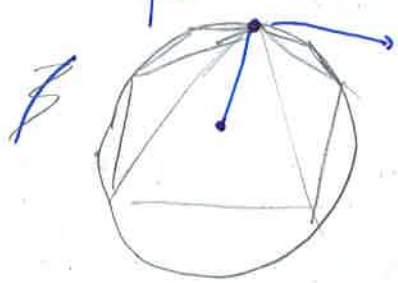
4) Récurrence

segment x — y

HR_n : $\forall \omega$ avec $\ell(\omega) \leq n$, $\forall x \in D$, $\forall y \in \omega(D) \Rightarrow [x,y] \subset C_{Tits}$ et ne rencontre qu'un # fini de $\omega'(C_I)$ $I \subset S$ $\omega' \in W$

⚠ On ne peut pas dire que rencontre un # fini de $\omega(D)$:

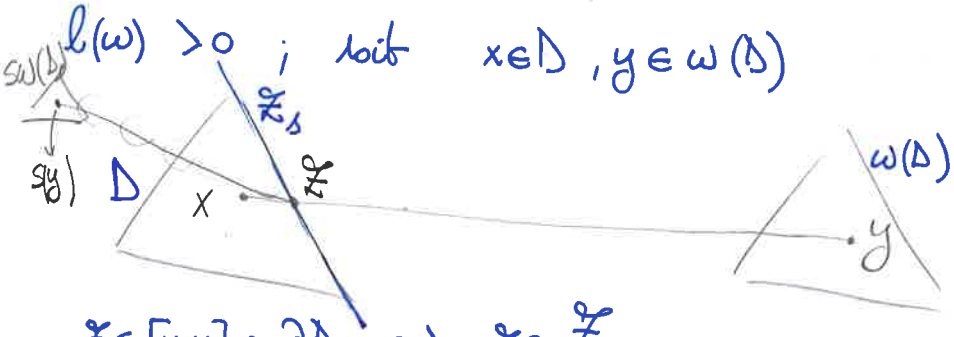




ce point rencontre un # infini de $\omega(D)$, mais une seule face <u>ouverte</u>

Si $\ell(w)=0$ ok car D convexe et possède un # fini de faces ouvertes

$\ell(w)>0$; soit $x\in D$, $y\in w(D)$



$z\in[x,y]\cap\partial D \Rightarrow z\in \mathcal{Z}_s$ pour un certain s

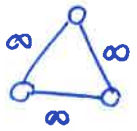
$\Rightarrow w(\mathring{D})\subset A_s^- \underset{\text{lemme clé}}{\Longrightarrow} \ell(sw)<\ell(w)$

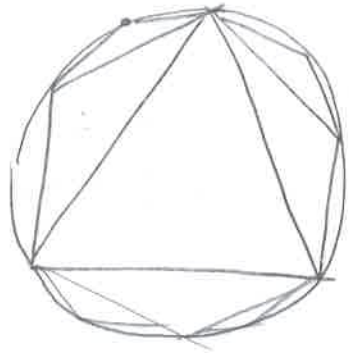
On applique l'H.R. à z, $s(y)\in sw(D)$ $\Longrightarrow$ le segm. $[z, s(y)]\subset C_{Tits}$ et ne rencontre qu'un # fini de ~~$w'(D)$~~ $w'(C_I)$

Le segment $s\cdot[z, s(y)] = [z,y]$ vérifie la même chose et $[x,y]=[x,z]\cup[z,y]$.

$\square$

...

Ex : $W=$ 

$\mathcal{U}=\mathbb{S}(C_{Tits})=$ 

= disque ouvert
$\cup$ pts rationnels au bord

Rq : la topologie sur $\mathbb{S}(C_{Tits})$ est induite par celle de $\mathbb{R}^3$ ($\neq$ topo. de complexe simplicial)
Problèmes posés par faces ayant stabilisateur ∞ (qui sont au bord).

Réflexions de W $R=\{wsw^{-1} \mid w\in W,\ s\in S\}$
Mur de $r=wsw^{-1}$ $= \mathrm{Fix}(r)\cap\mathcal{U} = M_r$ $\longrightarrow$ sépare $\mathcal{U}$ en deux demi-espaces