# GdT Immeubles de Tits

## Séance 5 (L. Marquis) : Groupes de Coxeter

### Système de Coxeter

~~Système~~ $S$ = ensemble fini

$(M_{st})_{s,t\in S}$ tq

- $M_{st} = M_{ts}$
- $M_{ss} = 1$

$M_{st} \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\} \quad s \neq t$

### Groupe de Coxeter

$$W = \langle s \in S \mid s^2 = 1 \ ; \ (st)^{M_{st}} = 1 \quad \text{si } M_{st} < \infty \rangle$$

### 4.2 Représentation canonique

- $V = \mathbb{R}^S$ avec base canonique $(e_s)_{s\in S}$
- on munit $V$ d'une forme bilin. $B$ qui vérifie
  $B_{st} = B(e_s, e_t) = -\cos\left(\frac{\pi}{M_{st}}\right)$
- pour chaque $s \in S$, on note $\rho_s : V \longrightarrow V$
  $x \longmapsto x - 2B(e_s, x)e_s$

Rq : • les $\rho_s$ sont des réflexions qui vérifient
- $\rho_s(e_s) = e_s$
- $\ker(\rho_s - 1) = \{B(e_s, \cdot) = 0\} = e_s^\perp =: H_s$

• $\bigcap H_s = \ker B$ ($= \{0\}$ si $B$ non-dég.)

Prop : • Les réflexions $\rho_s$ préservent $B$

• $s \neq t \Rightarrow B \geq 0$ sur $V_{st} = \mathbb{R}e_s \oplus \mathbb{R}e_t$, qui est préservé par $\langle \rho_s, \rho_t \rangle$

- si $M_{st} < \infty \Rightarrow B_{|V_{st}} > 0$ et $\rho_s \rho_t$ est une rotation d'ordre $M_{st}$
- si $M_{st} = \infty \Rightarrow B_{|V_{st}}$ pas déf positive, $\rho_s \rho_t$ unipotent (donc d'ordre $\infty$).

Preuve : exo (lemme : $\vartheta(e_s, e_t) = \pi - \frac{\pi}{M_{st}}$) $\square$

<u>Corollaire</u> : Il existe une unique représentation $\rho : W \to GL(V)$ qui vérifie $\rho(s) = \rho_s$.
On l'appelle <u>représentation canonique</u>

<u>Rq</u> : La repr. canonique passe bien aux sous-gpes spéciaux
$\underline{W_I} = \langle s \in I \rangle \leq W$
$\rho^W|_{\underline{W_I}, \mathbb{R}^I} = \rho^{W_I}$

$$\begin{tikzcd} \underline{W_I} \arrow[r, "\rho^W|_{\mathbb{R}^I}"] & GL(\mathbb{R}^I) \\ W_I \arrow[u, two heads] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(en part. $\rho^W(W_I)$ fixe $\mathbb{R}^I$)

<u>Cor</u> : si $\# I = 2 \Rightarrow$ le morphisme naturel $W_I \twoheadrightarrow \underline{W_I}$ est un isomorphisme

## 4.3 La représentation géométrique

$\sigma$ = repr. duale de $\rho$ = "<u>représentation géométrique</u>"

L'el. $s \in S$ agit sur $f \in V^*$ via $\sigma$ par
$\sigma_s(f) = f - 2f(e_s)\, B(e_s, \cdot)$

- $Z_s := \ker(\sigma_s - 1) = \{ f \in V^* \mid f(e_s) = 0 \}$
  $A_s^+ := \{ f \in V^* \mid f(e_s) > 0 \}$
  $D := \overline{\bigcap_{s \in S} A_s^+}$ = cône simplicial fermé d'intérieur non-vide

- $\sigma_s$ = réflexion d'hyperplan $Z_s$, et si on note $b_s = B(e_s, \cdot)$, alors $\sigma_s(b_s) = -b_s$

- On note, pour $I \subseteq S$, $C_I$ la face ouverte de $D$ donnée par

$$C_I = \bigcap_{s \in I} Z_s \cap \bigcap_{t \notin I} A_t^+$$ (ouvert dans l'espace vect. qu'elle engendre)

En part : $C_\emptyset = \mathring{D}$, $C_S = \emptyset$.

- $\forall x \in C_I$, $\forall g \in \underline{W_I} \Rightarrow g(x) = x$, i.e. $\underline{W_I} \subset \mathrm{Stab}_x$

## 4.4 Racines

Déf : Les racines de $W$ sont les éléments de

$$\Phi = \{ \rho(w)(e_s) \mid w \in W,\ s \in S \} \subset V$$

Une racine est positive/négative si ses coord. dans la base canonique sont positives/négatives ou nulles.

Lemme (clé) : $s \in S$, $w \in W$. Alors $\qquad$ $l$ = longueur du mot

$$\begin{cases} l(ws) > l(w) \Rightarrow w(e_s) > 0 \\ l(ws) < l(w) \Rightarrow w(e_s) < 0 \end{cases}$$

Rq : jamais égalité car les relation sont de longueur paire

Cor : Toute racine est positive ou bien négative.

Lemme (interpr. géom.) : $s \in S$, $w \in W$

$$l(sw) > l(w) \iff w(\mathring{D}) \subset A_s^+$$
$$l(sw) < l(w) \iff w(\mathring{D}) \subset A_s^-$$

(on passe à $sw$ car action sur le dual...)

Preuve (en admettant le lemme clé) :

$$l(sw) > l(w) \underset{\text{déf. } l}{\iff} l(w^{-1}s) > l(w^{-1}) \underset{\text{lemme clé}}{\iff} w^{-1}(e_s) > 0$$

Soit $f \in \mathring{D}$ ($f = \sum a_t e_t^*$ avec $a_t > 0$)

$$\langle w(f) \mid e_s \rangle = \langle f \mid w^{-1} e_s \rangle$$

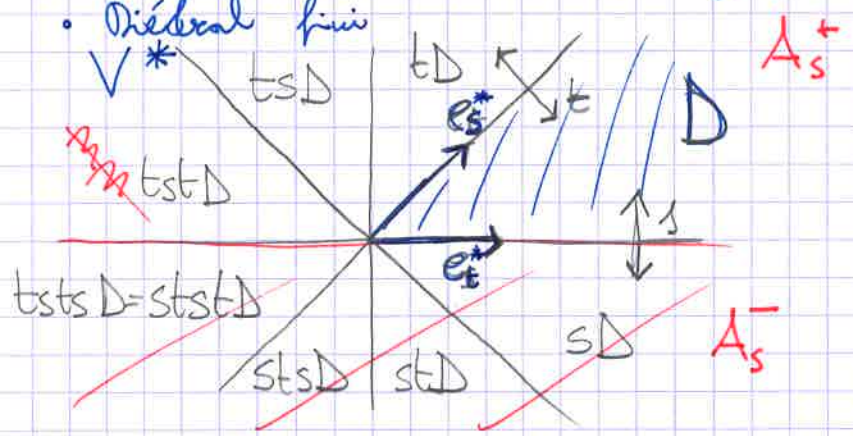
$$w^{-1}(e_s) > 0 \Rightarrow \langle f \mid w^{-1} e_s \rangle > 0$$
$$< 0 \Rightarrow \langle \text{"} \quad \text{"} \rangle < 0$$

Donc $\ell(sw) > 0 \iff w(D^\circ) \subset A_s^+$ $\square$

Rq : Pour montrer le lemme clé, on va ~~en~~ avoir besoin du lemme clé pour les gpes diédraux.
Pour ça, on montre d'abord l'interpr. géom.

"Démo" du lemme "interpr. géom" dans le cas du gpe diédral :

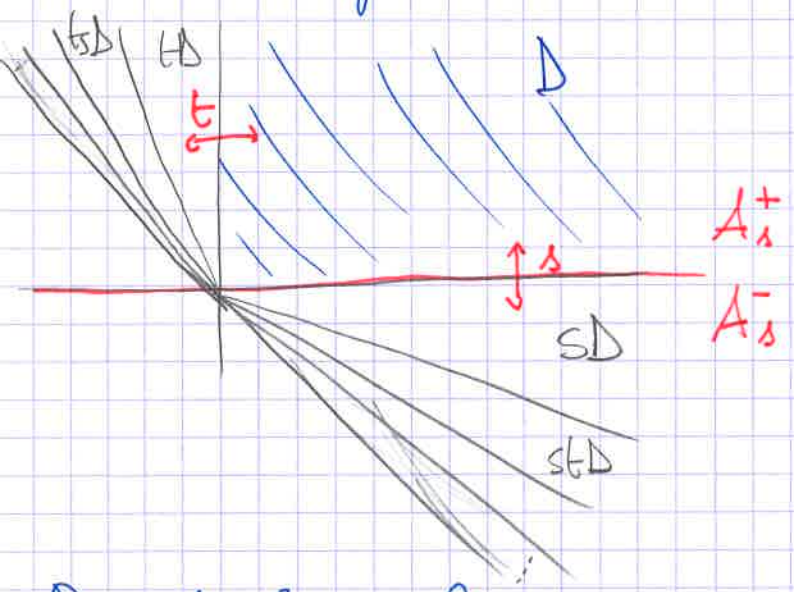
- Diédral fini




$w(D^\circ) \subset A_s^+ \iff$ $w$ commence par un $t$ (ou mieux : écrit en long min ne commence pas par $s$)

$\subset A_s^- \iff w$ commence par un $s$ (mieux : qu'en long. min peut commencer par $s$)

- Diédral infini




Démo du lemme clé :

- Suffit de faire le cas positif : si $\ell(ws) \leq \ell(w) \Rightarrow$
$\ell((ws)\cdot s) > \ell(ws) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ws(e_s) > 0 \\ \quad\quad \| \\ \quad w(-e_s) \end{array}\right\} \Rightarrow w(e_s) < 0$

- Récurrence sur la longueur de $w$
  - $\ell(w) = 0$ ok
  - $\ell(w) > 0$, $\ell(ws) > \ell(w)$
    On choisit $t \in S$ tq $\ell(wt) < \ell(w)$ ($t$ = dernière lettre)

on a $s \neq t$, soit $I = \{s,t\}$

$A := \{ v \in W \mid v^{-1}w \in W_I$ et $\ell(v) + \ell_I(v^{-1}w) = \ell(w)\} \ni \begin{matrix} w \\ wt \end{matrix}$

Si on pose $v^{-1}w = v_I$, on a $w = v \cdot v_I$

· On vérifie d'abord que $\ell_I(v_I s) > \ell_I(v_I)$

Par l'absurde, sinon pour $v \in A$

$$\ell(ws) = \ell(v v^{-1} w s) \leq \ell(v) + \ell(v_I s) \leq \ell(v) + \ell_I(v_I s)$$
$$< \ell(v) + \ell_I(v_I) = \ell(w)$$

↳ par déf. de $A$

absurde par hyp

· on peut appliquer le lemme clé à $\overset{\text{diédral}}{v_I}$ et $\overset{\mathbb{R}^I}{e_s}$ $\Longrightarrow$

$v_I(e_s) = a e_s + b e_t \qquad a, b \geq 0$

· Si on choisit $v$ de longueur minimale dans $A$, on va montrer que $\begin{cases} \ell(vs) > \ell(v) \\ \ell(vt) > \ell(v) \end{cases}$

Supposons $\ell(vs) \leq \ell(v)$

$$\ell(w) \leq \ell(vs) + \ell(\underbrace{s v^{-1} w}_{\in W_I}) \leq \ell(vs) + \ell_I(s v^{-1} w)$$
$$\leq \ell(v) - 1 + \ell_I(v^{-1}w) + 1) \leq \ell(v) + \ell_I(v^{-1}w) \overset{v \in A}{=} \ell(w)$$

$\rightarrow$ égalité partout $\Longrightarrow \ell(w) = \ell(vs) + \ell_I(s v^{-1} w)$

$\Longrightarrow vs \in A$ et

$\ell(vs) < \ell(v)$ absurde par minimalité de $v$

Même pour $t$.

· HR $\Longrightarrow v(e_s) > 0$

$v(e_t) > 0$

$w(e_s) = v v_I(e_s) = v(a e_s + b e_t) > 0$ car $a, b \geq 0$ $\square$

<u>Corollaire</u> : $\rho$ est fidèle

Preuve : $w \neq 1$, $s$ tq $\ell(ws) < \ell(w)$

$\left.\begin{matrix} w(e_s) < 0 \\ e_s > 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \rho(w) \neq 1$

$\square$