GdT : Immeubles de Tits

Rémy Coulon : L'immeuble de $SL_2(K)$ II

Rappel :

K corps, $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ valuation discrète

$\mathcal{O}$ anneau de valuation

π uniformisant, $k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$, $V = K^n$

Immeuble Δ : • sommets $\leftrightarrow$ classes de réseaux

• arêtes : (Λ_1, Λ_2) ssi $\exists$ rep L_1, L_2 tq $\pi L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq L_1$

On a mq : • $\dim \Delta = n-1$

• Δ connexe

~~~

On se restreint à $n=2$, et on veut prouver Δ arbre

Déf : M module sur un anneau intègre. Sa <u>longueur</u> est le ℓ max tq $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_\ell = M$.

Lemme : Λ, Λ' classes de réseaux, L' rep. de Λ'.

$\exists!$ rep. de Λ qui vérifie une des conditions équivalentes

i) $L \subset L'$ maximal

ii) $L \subset L'$, $L \not\subset \pi L'$

iii) $L \subset L'$ $L'/L \cong \mathcal{O}/\pi^\ell\mathcal{O}$

dans ce cas $\ell(L'/L) = \ell$

En part. si $d(\Lambda, \Lambda') = 1 \iff \ell(L'/L) = 1$ ça c'est vrai juste pour $n=2$, le reste en général

Rq : base adaptée $L' = \mathcal{O}v_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}v_n$

$L = \mathcal{O}\pi^{m_1}v_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}\pi^{m_n}v_n$ $m_1 = 0$ $m_i \geq 0$

$\Rightarrow$ $d = \max\{m_i\}$ $\ell^* = \sum m_i$

$\Rightarrow$ $d(\Lambda, \Lambda') \leq \ell(L'/L)$
~~~

Idée : on regarde $\Lambda_1, \dots \Lambda_\ell$ sommets d'un chemin sans aller-retour dans Δ

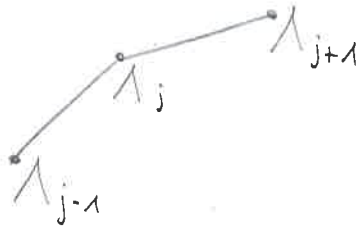
$\rightsquigarrow L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \dots \supsetneq L_\ell$ tq L_{j+1} maximal dans L_j

$\ell(L_j/L_{j+1}) = 1 \rightarrow \ell(L_0/L_\ell) = \ell$

On montre par récurrence que L_j maximal dans L_0.

- $j=1$ évident
- $j \Rightarrow j+1$

Par lemme suffit de mq $L_{j+1} \not\subset \pi L_0$



$\pi L_j \subsetneq L_{j+1} \subsetneq L_j$ (le max du lemme marche pour définir l'arête, car $\ell = 1 \dots$)

$\pi L_j \subsetneq \pi L_{j-1} \subsetneq L_j \subsetneq L_{j-1}$

On se place dans $k^2 = L_j/\pi L_j$

$L_{j+1}/\pi L_j$, $\pi L_{j-1}/\pi L_j$ sont deux droites de $L_j/\pi L_j$

et comme les arêtes ~~succ~~ successives sont distinctes $\Lambda_{j-1} \neq \Lambda_{j+1}$

$\Rightarrow$ ces deux droites engendrent k^2

$\Rightarrow L_j = L_{j+1} + \pi L_{j-1}$

On sait $L_{j-1} \subsetneq L_0 \Rightarrow \pi L_{j-1} \subseteq \pi L_0$

d'après l'hyp. de récurrence $L_j \not\subset \pi L_0$ $\Big\} \Rightarrow L_{j+1} \not\subset \pi L_0$.

Donc $d(\Lambda_0, \Lambda_\ell) \leq \ell = \ell(L_0/L_\ell) \leq d(\Lambda_0, \Lambda_\ell)$;

les chemins sans aller retour sont des géodésiques

Donc on a montré

Thm : pour $n=2$, Δ est un arbre.

$\square$

$V = k^2$

L'action de $GL(V)$

On regarde l'action de $GL(V)$ sur Δ
(transitive sur les sommets)

~~Éviter~~
Éviter les inversion

On introduit $\chi(L_1, L_2) = \ell(L_1/L_1\cap L_2) - \ell(L_2/L_1\cap L_2)$

Prop : $g \in GL(V)$, L réseau. Alors $\chi(L, gL) = v(\det(g))$
↳ vraie pour n qcq

Preuve : base adaptée
$$L = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$$
$$gL = \mathcal{O}\pi^a e_1 \oplus \mathcal{O}\pi^b e_2$$
(on n'impose pas $a=0$, $b \geq 0$ car on veut vraiment gL)

$$ge_1 = \alpha\pi^a e_1 + \beta\pi^b e_2$$
$$ge_2 = \gamma\pi^a e_1 + \delta\pi^b e_2 \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O})$$
$$v(\det(A)) = 0$$

Dans la base e_1, e_2, $g = \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow v(\det(g)) = a+b$

$a' = \max\{a, 0\}$ $\quad b' = \max\{b, 0\}$

$$L/L\cap gL = \mathcal{O}/\pi^{a'}\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}/\pi^{b'}\mathcal{O} \Rightarrow \ell(L/L\cap gL) = a' + b'$$

$$gL/L\cap gL = \mathcal{O}/\pi^{a'-a}\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}/\pi^{b'-b}\mathcal{O} \Rightarrow \ell(gL/L\cap gL) = (a'-a) + (b'-b)$$

$$\Rightarrow \chi(L, gL) = a + b = v(\det(g))$$

$\square$

Cor : Λ classe de réseau. Alors
$$d(\Lambda, g\Lambda) = v(\det(g)) \pmod 2$$
→ et ça devrait être vrai mod n pour $n > 2$

Preuve : $d(\Lambda, g\Lambda) = |a-b| = a+b \mod 2$

$GL(V)^+$ noyau de $GL(V) \xrightarrow[\det]{} k^* \xrightarrow[v]{} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$
s.g. d'indice 2 de $GL(V)$.
Tous les éléments ont longueur de translation paire ; en part. on évite les inversions de sommets adjacents.
$\rightsquigarrow$ bicoloriage de Δ invariant sous l'action de $GL^*(V)^+$

$\rightsquigarrow$

<u>But</u> : comprendre les s.g. compacts de $GL(V)^\circ$ (noyau de $v \circ \det$) ; on va regarder les sous-groupes bornés (comme sous-ens. de $\mathrm{End}(V)$).

<u>Prop</u> : $H < GL(V)^\circ$ ~~est~~ est borné $\iff$ il est conjugué à un sous-groupe de $GL(2, \mathcal{O})$.

Idée : se ramener au stabilisateur d'un point.

<u>Lemme</u> : On fixe Λ un ~~sommet~~ sommet de Δ, L un rep. de Δ.
On fixe $H < GL(V)^\circ$.
Alors $\mathrm{Stab}_H(\Lambda) = \mathrm{Stab}_H(L)$

Preuve : $\boxed{\supset}$ ✓
$\boxed{\subset}$ $h \in \mathrm{Stab}_H(\Lambda) \Rightarrow \exists x \in k^* \quad h(L) = xL$
$0 = v(\det(h)) = \chi(L, hL) = \chi(L, xL) = 2v(x)$
$\Rightarrow x \in \mathcal{O} \Rightarrow hL = xL = L$. $\square$

<u>Lemme</u> : si $H < GL(V)^\circ$ est un sg borné, alors les orbites de $H \curvearrowright \Delta$ sont bornées.

Preuve : par inég. triang. suffit de montrer qu'une orbite est bornée.

$L = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$, $\Lambda = [L]$

H borné $\Rightarrow$ les coeffs sont bornés, i.e. $\exists\, v_0$ tq
$\forall h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in H$, $v(h) = \min\{v(\alpha), v(\beta), v(\gamma), v(\delta)\} \geq v_0$

Pour un tel h, $\pi^{-v(h)} \cdot hL \subseteq L \Rightarrow$

$$d(\Lambda, h\Lambda) \leq \ell\left(L / \pi^{-v(h)} \cdot hL\right) = \chi\left(L, \pi^{-v(h)} \cdot hL\right) = v\left(\det\left(\pi^{-v(h)} \cdot h\right)\right)$$

$$= -2v(h) \leq -2v_0$$

Donc l'orbite de Λ est bornée. $\square$

<u>Lemme</u> : si H agit sans inversion sur Δ et H a une orbite bornée $\Longrightarrow$ H fixe un ~~sm~~ sommet.

Preuve (idée) : on ~~fix~~ fixe une orbite $H \cdot \Lambda$, T = enveloppe convexe de $H \cdot \Lambda$.

Alors T est un sous-arbre borné de Δ, H-invariant.

$\Rightarrow$ Si on coupe les arêtes extremales on recobtient un arbre invariant + petit ... $\rightsquigarrow$ sommet ou arête H-inv.

Arête impossible car pas d'inversion. $\square$

Donc

$H < GL(V)^\circ$ borné $\Longrightarrow$ les orbites de $H \curvearrowright \Delta$ sont bornées $\Longrightarrow$ H fixe un sommet de Δ $\Longrightarrow$ H fixe un réseau

$\Longrightarrow$ H conjugué à un sous-gpe de $GL(2, \mathcal{O})$

Ceci termine la preuve de la Prop.

Rq : La m̂ preuve devrait marcher pour n supérieur.

<u>Thm</u> (Ihara) : $H \leq SL_2(\mathbb{Q}_p)$ discret sans torsion $\Longrightarrow$ H est libre.

Idée de preuve : H doit agir sans pts. fixes sur Δ $\xRightarrow[\text{de graphes}]{\text{un thm}}$ libre.