GdT : Immeubles de Tits

I (Rémy Coulon)

Arbre de SL_2

K = corps avec valuation discrète v $\quad v : K^* \to \mathbb{Z}$

$v(0) = +\infty$

$v(x+y) \geq \inf(v(x), v(y))$

$\mathcal{O}$ = anneau de valuation $:= \{x \mid v(x) \geq 0\}$

On fixe un uniformisant π tq $v(\pi) = 1$

Ex : · $\mathbb{Q}_p$

· corps des fract. ratio.

· corps des fonctions méromo.

Déf : un <u>réseau</u> est un sous-$\mathcal{O}$-module t.f. de $V = K^n$ qui engendre K^n en tant que e.v.

Rq : - un réseau est libre de rang n

- $K^* \curvearrowright \{\text{réseaux}\}$ par homothétie

Déf : deux réseaux sont <u>équivalents</u> s'ils sont homothétiques.

tutte le cellule possibili di dim ≥ 2 sono presenti

<u>l'immeuble de Bartold-Tits</u> Δ de $SL_n(K)$ c'est le complexe simpl. drapeau dont les <u>sommets</u> : les classes de réseaux

les <u>arêtes</u> : les paires $\Lambda \neq \Lambda'$ tq $\exists L, L'$ des repres. tq $\pi L \subsetneq L' \subsetneq L$

Ex : $\mathbb{Q}$ avec valuation 2-adique, $n = 2$

On fixe e_1, e_2 base de $V = \mathbb{Q}^2$ $\rightsquigarrow \Lambda_0 = [e_1, e_2]$

$L_0 = \mathcal{O}e_1 \oplus \mathcal{O}e_2$ $\qquad \boxed{\pi = 2}$

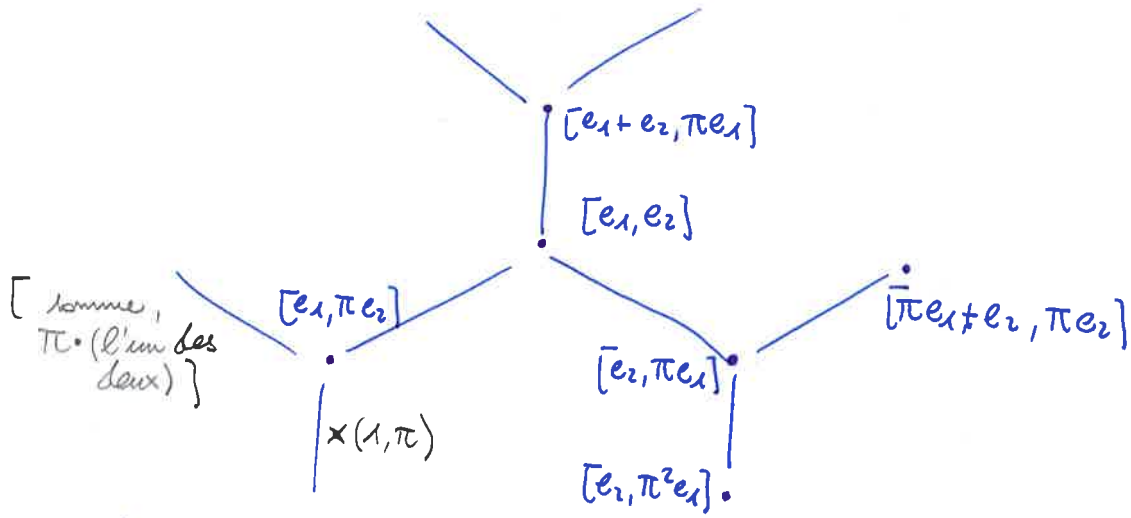
Un voisin de Λ_0 est repr. par L tq $\pi L_0 \subsetneq L \subsetneq L_0$

$\{0\} \subsetneq L/\pi L_0 \subsetneq L_0/\pi L_0$

Mais $L_0/\pi L_0 \cong k^2$ $\qquad k = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = \mathbb{F}_2$

$\Rightarrow$ 3 voisins

$$L/\pi L_0 = \begin{cases} k e_1 \\ k e_2 \\ k(e_1+e_2) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} [e_1, \pi e_2] \\ [\pi e_1, e_2] \\ [e_1+e_2, \pi e_1] = [e_1+e_2, \pi e_2] \end{array}$$



Fait : c'est un arbre

Prop : Δ est connexe

[Lemme 1 : L et L' réseaux $\Rightarrow \exists x \in k^*$ tq $xL \subset L'$
(thm de la base adaptée)

Lemme 2 : L, L' réseaux, $L \subset L'$ $\Rightarrow \exists\, e_1, \dots e_n$ base de de L' (comme $\mathcal{O}$-module) et $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathcal{O}$ tq $\alpha_1 e_1, \dots \alpha_n e_n$ base ~~base~~ de L. On peut choisir $\alpha_i = \pi^{m_i}$.]

Preuve : Λ, Λ' sommets de Δ $\rightsquigarrow$ repr. $L \subset L'$

$L' = \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_n$

$L = \mathcal{O}\pi^{m_1}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}\pi^{m_n}e_n$

On crée une suite de réseaux $L_0 = L, L_1, \dots, L_p = L'$ tq à chaque étape on décroit de 1 la valuation sur un des coordonnées seulement (abbassiamo gli uni alla volta)

$[L_i]$ et $[L_{i+1}]$ adjacentes : $L_i \subsetneq L_{i+1}$ ✓

$\pi L_{i+1} \subsetneq L_i$ car on baisse de 1 à la fois ✓

$\square$

Q : distance $= \max\{m_i\}$? (Avec un $m_j = 0$)

Prop : Δ est de dimension $n-1$

Fait : Si $\Lambda_1, \dots \Lambda_p$ sommets reliés 2 à 2 par une arrête (simplexe de dim $p-1$) $\Rightarrow \exists$ repr. (quitte à réordonner) tq

$\pi L_p \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_p$

Preuve de la prop :

- dim $\leq n-1$. Soit $L_1, \dots L_p$ un $(p-1)$-simplexe

$\{0\} \subsetneq L_1/\pi L_p \subsetneq \dots \subsetneq L_p/\pi L_p \cong k^n \Rightarrow p \leq n$

- si on choisit un drapeau maximal (comme dans la preuve avant). Il faut mq les classes de réseaux qu'on trouve sont distinctes (mais lemme : $\pi L \subsetneq L' \subsetneq L \Rightarrow \Lambda \neq \Lambda'$) $\square$

Lemme : Λ, Λ' adjacentes, L, L' repr $\Rightarrow$ soit $L \subsetneq L'$ soit $L' \subsetneq L$

Preuve : ~~En effet~~ les homothéties sont π^n $n \in \mathbb{Z}$ (le reste c'est des inversibles dans $\mathcal{O}$)

Preuve du fait : récurrence sur p.

- $p=2$ déf. d'une arrête
- $p \Rightarrow p+1$ $\Lambda_1, \dots \Lambda_{p+1}$ 2 à 2 voisins $\rightsquigarrow$

$\pi L_p \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_p$

Λ_p, Λ_{p+1} adj $\Rightarrow$

$\exists L_{p+1}$ tq $\pi L_{p+1} \subsetneq L_p \subsetneq L_{p+1}$

Si $\pi L_{p+1} \subsetneq L_1$ ok

Sinon j minimal tq $\pi L_{p+1} \subsetneq L_j$

$\pi L_{p+1} \subsetneq L_j \subsetneq \dots \subsetneq L_p \subsetneq L_{p+1}$

$\pi L_{p+1} \not\subset L_{j-1} \Rightarrow L_{j-1} \subsetneq \pi L_{p+1}$ par lemme

$\downarrow$

$\Lambda_{p+1}, \Lambda_{j-1}$ adj

$\pi L_p \subsetneq L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_{j-1} \subsetneq \pi L_{p+1} \subsetneq L_j \subsetneq \dots \subsetneq L_p$

$\square$

Rq: si on fixe une classe de base Λ_0, on peut associer à Λ $v(\det(P))$ (P matrice de passage de L_0 à L), qui est bien déf mod π^n.

Prop: $n=2 \Rightarrow \Delta$ est un arbre.

Lemme: Λ, Λ' classes, L' repr. de Λ' $\Rightarrow \exists!$ repr. L de Λ qui vérifie une des conditions équivalentes suivantes

1) $L \subset L'$ maximal pour cette prop.

2) $L \subset L'$, $L \not\subset \pi L'$

3) $L \subset L'$ $L'/L \cong \mathcal{O}/\pi^k\mathcal{O}$

Preuve : admis. $\square$

Longueur d'un module M: plus grand entier l tq

$\exists M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_l \subset M$

$d(\Lambda, \Lambda') \leq l$ (suit du lemme)