Fonctions holomorphes (HOLO)

UNIVERSITÉ DE RENNES

FEUILLE DE TD N°2
FONCTIONS HOLOMORPHES : SÉRIES ENTIÈRES

1. RAPPELS SUR LES DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCE

Exercice 1 🏠 (Convergences de suites et séries de fonctions)

1. Rappelez les définitions de convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Étudiez la convergence des fonctions $z \to z^n$ sur $\mathbb{D}(0,1)$.
3. Rappelez les définitions de convergence uniforme et normale d'une série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ définies sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (La fonction ζ de Riemann)
On considère la série $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$. Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, on note $R_\sigma = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma\}$.

On rappelle que la notation n^s signifie $n^s := e^{s\ln(n)}$ et est bien définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{C}$.

1. Calculez $|n^s|$.
2. Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^s}$ converge normalement sur R_σ, pour tout $\sigma > 1$.
3. Déduisez-en que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^s}$ converge normalement sur tous les compacts de $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Exercice 3 ☆☆ (La fonction η de Dirichlet)
On considère la série $\eta(s) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}$.

1. Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge normalement sur R_σ, pour $\sigma > 1$.
2. Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge uniformément sur les compacts de $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$. Vérifiez au passage que la convergence n'est pas normale.
3. Montrez que $\eta(s) = \zeta(s)(1-2^{1-s})$.
4. Montrez que $\zeta(s) \to \infty$ lorsque $s \to 1^+$.

Exercice 4 (Un autre exemple)

1. Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{z+n}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{-1,-2,-3\cdots\}$.
2. La convergence est-elle normale ?

Exercice 5 (Rayons de convergence via les critères de Cauchy et d'Alembert)

1. Donnez le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$\exp(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} \quad \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{z^n}{n} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+1)} \quad \sum_{n\geqslant 1} n\pi^n z^n$$

2. Lorsque R est fini, étudiez le comportement des séries ci-dessus en $z = R$.

Exercice 6 (Opérations sur les rayons de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2.

1. Montrez que le rayon de convergence de $\sum(a_n + b_n)z^n$ est supérieur à $\min(R_1, R_2)$ avec égalité si $R_2 \neq R_1$. Exemples ?
2. Montrez que le rayon de convergence de $\sum(a_n b_n)z^n$ est supérieur à $R_1 R_2$.

Exercice 7 ☆ (DSE sur $\mathbb{R}$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que pour tout $a > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que, la suite $(\|f^{(n)}\|_{[-a,a]}\rho^n)_n$ est bornée.

1. Montrez que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est infinie.
2. Montrez que la somme de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ restreinte à $\mathbb{R}$ coïncide avec la fonction f.
   La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ s'appelle le développement en série entière de f.
3. Déduisez-en que les développements en série entière des fonctions exp, sin et cos.
   En utilisant la définition (bientôt archaïque) suivante pour exp *:* exp *est l'unique fonction telle que* $\exp' = \exp$ *et* $\exp(0) = 1$. *Pour* sin *et* cos *on utilisera que* sin *et* cos *vérifient* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$*, sont bornées et leurs valeurs en* 0.

Exercice 8 ☆ (DSE sur$]-1,1[$)

1. Montrez que arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$ admettent un développement en série entière par une série entière de rayon de convergence égale à 1.
2. Rappelez la formule de taylor à l'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \neq 0$ avec votre reste préféré. On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$ le reste de Taylor tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.
3. Déduisez-en les développements en série entière de arcsin et arccos.

Exercice 9 (Estimations de reste)

Montrez que pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $z \in \mathbb{D}$, $\left|\exp(z) - \sum_0^N \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{2}{(N+1)!}$.

Exercice 10 🏠 (Dérivation)

Montrez que pour tout entier naturel k et tout $z \in \mathbb{D}$, $\quad \dfrac{1}{(1-z)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} z^{n-k}.$

3. Séries entières et équations différentielles

Exercice 11 🏠 (Résolution d'une équation différentielle à l'aide de séries entières)

Cherchez des solutions de $y' = y$ ou $y' = -y^2$ sous la forme d'un polynôme ou d'une série entière, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, puis sur un disque complexe. *On n'utilisera surtout pas le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Exercice 12 ☆🏠 (Développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle)

1. Montrez que $\arcsin^2$ vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy'(x) = 2$ sur $]-1,1[$.
2. En admettant (ou démontrant) que $\arcsin^2$ est développable en série entière sur cet intervalle, déduisez-en une condition nécessaire sur ses coefficients.
3. Donnez un développement en série entière de $(\arcsin)^2$.

4. Séries génératrices

Exercice 13 🏠 (Série génératrice d'une variable aléatoire entière)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Sa fonction génératrice de X est la fonction g_X définie par

$$g_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)s^n \quad \text{pour tout } 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Elle caractérise la loi de X. Si X et Y sont deux v.a. à valeurs entières indépendantes, alors rappelons que

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y) = g_X(s)g_Y(s).$$

1. Vérifiez que la fonction génératrice d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ est
$$g(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (ps+1-p)^n$$
2. Vérifiez que la fonction génératrice d'une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ est $g(s) = e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$.
3. Quelle est la loi d'une somme de deux v.a. entières indépendantes de lois $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$?
4. Quelle est la loi d'une somme de deux v.a. entières indépendantes de lois $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$?

Exercice 14 🏠 (Un petit dessin et un petit calcul à faire à la maison)

Soit $0 < \theta < \pi/2$, on définit :

$$\Delta_\theta = \{z \in \mathbb{D}(0,1) \,|\, \exists 0 < \rho < \cos(\theta), \exists \varphi \in [-\theta, \theta], z = 1 - \rho e^{i\varphi}\}$$

1. Dessinez Δ_θ.

2. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

Ind : L'inégalité suivante est triviale

$$\forall z \in \mathbb{D}(0,1), \quad \frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{1-|z|^2}.$$

Exercice 15 ☆☆ (Théorème d'Abel-Dirichlet)

Soit $\sum u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On suppose que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

1. Remarquez que si la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge absolument alors la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

On examine à présent, le cas où la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge, mais pas absolument. Soit $0 < \theta < \pi/2$, on définit :

$$S_\theta = \overline{\Delta_\theta} \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\}$$

2. Nous allons démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n z^n$ converge uniformément sur S_θ.

a. On pose $s_n = \sum_{k \geqslant n} u_k$. Établissez l'égalité (transformation d'Abel) suivante :

$$\forall z \in S_\theta, \forall N \geqslant 1, \qquad \sum_{n \geqslant N} u_n z^n = s_N\, z^N + (z-1) \sum_{n \geqslant N} s_{n+1} z^n$$

b. Déduisez-en que :

$$\forall z \in S_\theta \setminus \{1\}, \forall N \geqslant 1, \qquad \left| \sum_{n \geqslant N} u_n z^n \right| \leqslant |s_N| + \frac{|1-z|}{1-|z|} \sup_{n \geqslant N} |s_n|$$

c. Déduisez-en que (à l'aide de l'exo 14) :

$$\forall z \in S_\theta, \forall N \geqslant 1, \qquad \left| \sum_{n \geqslant N} u_n z^n \right| \leqslant \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta)}\right) \sup_{n \geqslant N} |s_n|$$

et concluez.

3. Déduisez-en l'énoncé suivant : Soit $\sum u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$, on note $f : \mathbb{D}(0,R) \to \mathbb{C}$ sa somme. On suppose qu'il existe z_0 vérifiant $|z_0| = R$ tel que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n z_0^n$ converge. Alors, on a :

$$\lim_{z \to z_0, z \in \Delta_{z_0,\theta,r}} f(z) = \sum_{n \geqslant 0} u_n z_0^n$$

où $\Delta_{z_0,\theta,r}$ est le cône auquel vous pensez (Dessinez-le).

4. Calculez les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.