Fonctions holomorphes (HOLO)

Feuille de TD n°1
Fonctions holomorphes : le début

Pour le premier TD : vérifiez que vous savez faire tous les exos de révision, et posez vos questions en TD si besoin.

1. Révisions sur les nombres complexes

On rappelle qu'un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ s'identifie à l'ensemble des nombres complexes : le point M de coordonnées (a, b) est associé au nombre complexe $z = a + ib$. On dit alors que M est le point *d'affixe* z. On rappelle qu'un nombre complexe $z = a + ib$ a une écriture polaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ où r est le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de z et θ un *argument de* z, c'est-à-dire une mesure dans $\mathbb{R}$ modulo 2π de l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}})$ où M est le point d'affixe z.

Exercice 1 🏠 (Représentation graphique)

Représenter graphiquement les ensembles) ci-dessous.

1. $A = \{z \in \mathbb{C}, |z+2| \geqslant 3\}$
2. $B = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \geqslant -1\}$
3. $C = \{z \in \mathbb{C}, |z - 2i| \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 5/2\}$
4. $D = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Arg}(z) \in [-\pi/4, \pi/4] \text{ ou } \mathrm{Re}(z) \leqslant -1\}$.

Exercice 2 🏠 (Transformations du plan)

Exprimer les transformations géométriques suivantes comme des fonctions de la variable complexe.

1. La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$.
2. La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 1$.
3. la réflexion par rapport à la droite d'équation $x = 0$.
4. La symétrie centrale de centre le point O d'affixe 0.
5. La symétrie centrale de centre le point C d'affixe $z_0 = 1 + i$.
6. l'homothétie de centre C et de rapport 3.
7. la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
8. la rotation de centre C et d'angle $\pi/3$.
9. la translation de vecteur $(1, -1)$.

Exercice 3 🏠 (Racines)

1. Déterminer les racines carrées et les racines cubiques de i.
2. Déterminer les racines cubiques de 1.
3. Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3} + 3i$.
4. Résoudre les équations $z^2 + 2z - 2 + 4i = 0$ et $z^6 - z^3 + 1 = 0$.

Exercice 4
Soit f une fonction définie sur un voisinage de z. Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que :
$$f(z+h) = f(z) + ah + o(h)$$
lorsque $h \to 0$.

Exercice 5 (Multiplication et composition d'applications $\mathbb{C}$-dérivable)

1. Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de z et $\mathbb{C}$-dérivable en z. Montrer que fg est $\mathbb{C}$-dérivable en z et que $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
2. Soit f une fonction définie au voisinage de z, $\mathbb{C}$-dérivable en z et g une fonction définie au voisinage de $f(z)$ et $\mathbb{C}$-dérivable en $f(z)$. Montrer que $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z et que $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

Exercice 6 ($\mathbb{C}$-dérivabilité en un seul point)
Trouver l'ensemble des points où la fonction :
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{z^3}{\overline{z}} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases} \end{array}$$
est $\mathbb{C}$-dérivable.

Exercice 7 (Conjugaison, le retour)
Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en $c \in \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ est un ouvert.

1. Montrer que si $f'(c) \neq 0$ alors la fonction $z \mapsto \overline{f(z)}$ n'est pas dérivable en c.
2. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est dérivable en $\overline{c}$. Calculer sa dérivée.

Ind : On pourra simplement utiliser la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

Exercice 8 ☆ (Facteur de Blaschke)
On note $\mathbb{D}$ le disque unité. Soit $|w| < 1$. On définit la fonction $F_w : \mathbb{C} \setminus \{\overline{w}^{-1}\} \to \mathbb{C}$ par :
$$z \mapsto \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}$$

1. Rappeler pourquoi F_w est une fonction holomorphe.
2. Montrer que pour tout $|z| < 1$, on a $|F_w(z)| < 1$.
   Ind : On pourra montrer que :
   $$1 - |F_w(z)|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{1 + |w|^2|z^2| - 2\mathrm{Re}(w\overline{z})}.$$
3. Montrer que si $|z| = 1$ alors $|F_w(z)| = 1$.
4. Conclure que l'application F_w vérifie les propriétés suivantes :
   a. $F_w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, autrement dit $F_w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est bien définie et holomorphe.
   b. F_w échange 0 et w, autrement dit $F_w(0) = w$ et $F_w(w) = 0$.
   c. $F_w(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$.
   d. Les applications $F_w : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $F_w : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ et $F_w : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ sont des bijections continues, d'inverses continues (*Ind : Calculer $F_w \circ F_w$*).