Université de Rennes

**Fonctions holomorphes (HOLO)**

# Feuille de TD n°7
# Théorie des résidus

On notera $\mathbb{H}$ le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Si $f$ est une fonction méromorphe sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}$, on notera $\mathscr{P}(f)$ l'ensemble de ses pôles.

## 1. Singularités isolées

**Exercice 1** (Exemples de singularités isolées)

Décrire le type singularité (effaçable, pôle ou essentielle) des applications suivantes

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}\,, \quad g(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{et} \quad h(z) = \sin\left(1/z\right).$$

Si on trouve un pôle, on donnera son ordre.

## 2. Série de Laurent

**Exercice 2** (Série de Laurent)

Calculer la série de Laurent de $\dfrac{1}{z^2+z^3}$, puis de $\dfrac{\cos(z)}{z^3}$ au voisinage de l'origine.

## 3. Résidus

**Exercice 3**

Soient deux fonctions $g$ et $h$ holomorphes sur un ouvert connexe du plan complexe, $a$ un pôle de $g/h$ tel que $h(a) = 0$ et $h'(a)$ soit non nul. Montrer que :

$$\mathrm{Res}\left(a, \frac{g}{h}\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

**Exercice 4** (Calcul de résidus)

1. L'application $\cot(\pi z) := \dfrac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ est-elle méromorphe ? Si oui, déterminer ses résidus.
2. Calculer les résidus en tous les pôles de
$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}.$$

## 4. Calcul d'intégrale à l'aide du théorème des résidus

**Exercice 5** (Calcul d'intégrales trigonométriques)

1. Soit $a$ un nombre complexe de module différent de 1. Montrer que
$$i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \int_{\partial\mathbb{D}(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$
2. Déterminer les résidus des pôles de $\dfrac{1}{(z-a)(1-az)}$ contenus dans le disque unité ouvert.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2}$.

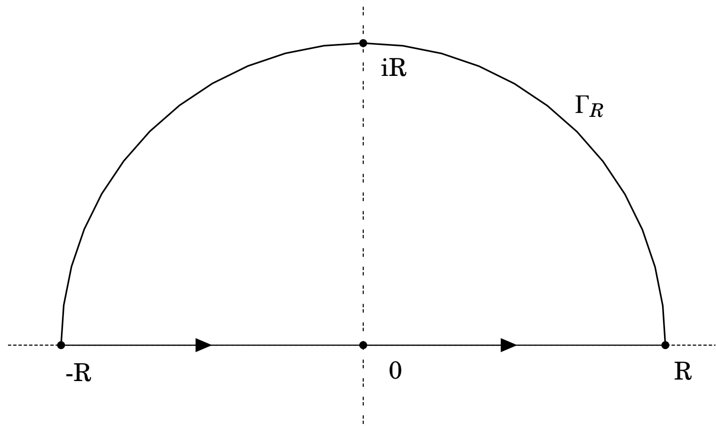


FIGURE 1. Le contour $\Gamma_R$ pour les exos 6 et 7.

**Exercice 6**

Soit $\Gamma_R$ le contour défini par le segment $[-R,R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamètre le segment $[-R,R]$, avec $R>1$.

**1.** Calculer $I_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$.

**2.** En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{e}$.

**Exercice 7** (Calcul d'intégrales rationnelles)

On considère la fonction méromorphe $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ sur $\mathbb{C}$.

**1.** Montrer que $zf(z)$ a une limite quand $z$ tend vers $\infty$.

**2.** Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ converge.

**3.** Déterminer les pôles de $f$ contenus dans le demi-plan $\mathbb{H}$ et leurs résidus.

**4.** En intégrant sur le chemin fermé $\Gamma_R$ défini par la figure 1, montrer que

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\partial(\mathbb{D}(0,R)\cap\mathbb{H})} f(z)dz = 2i\pi \sum_{c\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}(c,f).$$

**5.** Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**Exercice 8** (Somme de résidus)

Soit $f$ une fonction rationnelle, quotient d'un polynôme $P$ par un polynôme $Q$. On suppose que $\deg(P)+2<\deg(Q)$. Montrer que

$$\sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(c,f) = 0.$$

**Exercice 9** ☆ (Contraintes)
Soit $f$ une fonction entière telle que $f(z) \to \infty$ lorsque $z \to \infty$. On va montrer que $f$ est un polynôme.

Soit $g$ définie par $g(z) = f\left(1/z\right)$.

1. Montrer que 0 est un pôle de $g$.
2. En déduire l'existence d'un entier $N$ tel que :
$$\frac{f(z)}{z^N} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0.$$
3. Conclure en utilisant un exo de la feuille précédente.

**Exercice 10**
Soit $f$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles telle que $f(z) \to \infty$ lorsque $z \to \infty$. On va montrer que $f$ est une application rationnelle.

1. Chercher un pôlynome $P$ tel que $P(z)f(z)$ est une fonction entière.
2. Conclure.

**Exercice 11** ☆
Le but de l'exercice est de montrer que les bijections holomorphes du plan complexe $\mathbb{C}$ sur lui-même sont les fonctions du type $z \mapsto az + b$, où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes et $a \neq 0$. Pour la suite, on fixe $f$ une bijection holomorphe de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, et on pose : $g(z) = f\left(1/z\right)$.

1. Montrer que 0 est un pôle de $g$.
2. En déduire que $f$ est un polynôme.
3. Conclure.

**Exercice 12** (Fonctions rationnelles)
Soit $f$ une application méromorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (\mathscr{P}(f) \cup \mathbb{D}(0,r)), \quad |f(z)| \leqslant |z|^n.$$

1. Montrer que $\mathscr{P}(f) \subset \mathbb{D}(0,r)$.
2. En déduire que $f$ a un nombre fini de pôles.
3. Montrer que $f$ est une application rationnelle.