Fonctions holomorphes (HOLO)

Feuille de TD n°6
Application de la théorie de Cauchy

Une fonction f est dite entière si elle est définie sur le plan complexe tout entier et holomorphe.

Exercice 1 (Intégrale)

Soit a et b deux nombres complexes tels que $|a| < 1 < |b|$ et m, n deux entiers naturels.

1. En appliquant la formule de Cauchy pour les dérivées à une fonction judicieusement choisie, donner la valeur de l'intégrale
$$\int_{\partial\mathbb{D}(0,1)} \frac{dz}{(z-a)^m(z-b)^n}$$
pour $m, n \geq 1$.

1. Développement en séries entières

Exercice 2 (Prolongement)

Soit c un point de $\mathbb{C}_{\not\pi}$.

1. Déterminer un développement en séries entières $\sum_n u_n(z-c)^n$ centré en c de la branche principale du logarithme Log.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_n u_n(z-c)^n$ obtenue à la question précédente.
3. A quelle condition l'intersection $\mathbb{D}(c,R) \cap \mathbb{C}_{\not\pi}$ est-elle connexe ? Faites des dessins pour répondre.
4. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z-c)^n$ coïncide-t-elle avec Log sur l'intersection de $\mathbb{C}_{\not\pi}$ et de son disque de convergence.

Exercice 3 (Coefficients d'une série entière)

Soit $f(z) = \sum u_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $0 < r < R$, on pose $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Majorer le module de l'intégrale
$$\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$
2. En calculant l'intégrale, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Exercice 4 (Composition des séries entières)

Soit $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z_n$ deux séries entières convergentes, on note leurs sommes f et g, respectivement. On suppose que $g(0) = 0$. Montrer que la fonction $f \circ g$ est bien définie et développable en série entière au voisinage 0.

2. Principe des zéros isolés

Exercice 5
Soit $\mathscr{U}$ un ouvert connexe. Montrez que si deux fonctions holomorphes $f, g : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ vérifient $f \times g = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$. Autrement dit, l'anneau $\mathscr{H}(\mathscr{U})$ des fonctions holomorphes est un anneau intègre.

3. Fonctions entières

Exercice 6 (Une autre preuve du théorème de Liouville)

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit a et b deux points distincts dans $\mathbb{D}(0, r)$.

1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(\zeta-a)(\zeta-b)}$ en éléments simples.
2. Calculer
$$\int_{\partial\mathbb{D}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-b)} d\zeta$$
3. Majorer cette intégrale.
4. En déduire le théorème de Liouville : Toute fonction entière bornée est constante.

Exercice 7

1. Déterminer toutes les fonctions entières vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \geqslant 1$.
2. Soit n_0 un nombre entier naturel, $C, R > 0$ et f une fonction holomorphe définie sur le plan complexe tout entier vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| \geqslant R$, $|f(z)| \leqslant C|z|^{n_0}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n_0.

Exercice 8
Soit f une fonction entière. Montrer que si $|f(z)| \leqslant e^{\mathrm{Re}(z)}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = ae^z$.

4. Concept d'holomorphie

Exercice 9 (Polynômes)

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Montrer qu'il y a équivalence entre

i. f est polynomiale.

ii. Il existe $c \in \mathscr{U}$ tel que en dehors d'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 10 (Propriétés)

Pour chacune des propriétés suivantes, donner un exemple d'application holomorphe au voisinage de 0 qui la satisfait, ou bien démontrer qu'il n'existe pas de telle application.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini, $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini, $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2-1}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini, $|f^{(n}(0)| \geqslant (n!)^2$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini, $|f\left(\frac{1}{n}\right)| \leqslant e^{-n}$ et f est non nulle.

5. Principe du maximum

Exercice 11 (Lemme de Schwarz)

Soit $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ holomorphe, où $\mathbb{D}$ est le disque unité. On suppose que $f(0)=0$.

1. Montrer que pour tout réel r tel que $0<r<1$, on a :
$$\forall z\in\mathbb{D}(0,r),\qquad \left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{r}.$$
2. En déduire que :
$$\forall z\in\mathbb{D},\qquad |f(z)|\leqslant|z|$$
3. Montrer également que $|f'(0)|\leqslant 1$.
4. Montrer que s'il existe $z_0\in\mathbb{D}$ tel que $|f(z_0)|=|z_0|$ alors il existe a de module 1 tel que :
$$\forall z\in\mathbb{D},\qquad f(z)=az$$
5. Montrer que si $|f'(0)|=1$ alors il existe a de module 1 tel que :
$$\forall z\in\mathbb{D},\qquad f(z)=az$$
6. Montrer que tout automorphisme du disque f tel que $f(0)=0$ est une rotation.
7. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})=\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$.

6. Séries entières II

Exercice 12 ☆☆ Points réguliers et lacunes d'Hadamard

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme sur le disque $\mathbb{D}(0,1)$. Un point du bord $a\in\mathbb{S}^1$ est dit régulier s'il existe $r>0$ tel que f se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D}_a=\mathbb{D}(a,r)$. Un point du bord non régulier est dit singulier. Supposons par l'absurde que tous les points de $\mathbb{S}^1$ soient réguliers.

1. Montrer que f se prolonge de manière holomorphe sur $\Omega=\mathbb{D}(0,1)\cup\bigcup_{a\in\mathbb{S}^1}\mathbb{D}_a$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $\mathbb{D}(0,1+\varepsilon)\subset\Omega$. En déduire qu'il existe au moins un point singulier.
3. Déterminer le ou les points singuliers de la série $\sum z^n$.

Si tous les points du bords sont singuliers, on parle de coupure. Soient $(\lambda_n)_n\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lambda_{n+1}/\lambda_n\geqslant\alpha>1$. On suppose que la série entière $\sum a_n z^{\lambda_n}$ a pour rayon de convergence 1. On suppose par l'absurde que 1 est régulier et que la somme f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega=\mathbb{D}(0,1)\cup\mathbb{D}(1,\varepsilon)$.

4. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(p+1)\lambda_n<p\lambda_{n+1}$.
5. On pose $\varphi:z\in\mathbb{C}\mapsto\frac{z^{p+1}+z^p}{2}$. Montrer qu'il existe $R>1$ tel que $\varphi\left(\overline{\mathbb{D}(0,R)}\right)\subset\Omega$.
6. Soit $z\in]1,R[$. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{N}a_n\varphi(z)^{\lambda_n}\longrightarrow f\circ\varphi(z).$$
En déduire que 1 est singulier.
7. Conclure que $\mathbb{S}^1$ est une coupure.

Exercice 13 (Contraintes)

1. Soit f une fonction entière, on suppose que $\mathrm{Re}(f) \leqslant 0$. Montrer que f est une fonction constante. *On pourrait considérer la fonction $e^{f(z)}$.*
2. Soit f une fontion entière f non constante, montrer que l'image du plan complexe par f est dense dans $\mathbb{C}$.
3. Soit f une fonction entière, vérifiant $f(x+1) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction périodique de période 1.

☆☆ Soit f une fonction entière telle que $|f(z)|$ tend vers l'infini si $|z|$ tend vers l'infini. Montrer que :

   i. f n'admet qu'un nombre fini de zéros.
   ii. f est un polynôme.

Exercice 14 (Prolongement)

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \mathscr{U}$ et $f : \mathscr{U} \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. On suppose que f' admet un prolongement holomorphe à $\mathscr{U}$. Est-ce aussi le cas pour f ?

Exercice 15

Soit f une fonction entière.

1. Supposons que $f(n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction $\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}$ se prolonge en une fonction entière.
2. Montrer que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \qquad |\sin(x+iy)|^2 = \sinh(y)^2 + \sin^2(x)$$
3. Supposons de plus que $|f(z)| \leqslant e^{\pi|\mathrm{Im}(z)|}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = b\sin(\pi z)$.

Exercice 16 ☆ (Principe de réflexion de Schwarz)

Soit $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ continue, tel que f est holomorphe sur $\mathbb{H}$ et $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. On étend f en une fonction F par la formule
$$F(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$
On va montrer que F est holomorphe.

1. Vérifier que F est continue.
2. Montrer que F est holomorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$.
3. Montrer que si T est un triangle plein alors $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.
4. Conclure.