Université de Rennes

Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°5
FONCTIONS HOLOMORPHES :
THÉORIE DE CAUCHY

1. Intégrales sur les chemins du plan complexe

Exercice 1 (Premiers calculs)

1. On considère le bord $\mathscr{T}$ du triangle de sommet : $z=0$, $z=1$, et $z=i$, orienté dans le sens direct. Calculer les intégrales $\int_{\mathscr{T}} \mathrm{Re}(z)dz$ et $\int_{\mathscr{T}} ze^z dz$.
2. Soit le cercle unité $\mathscr{C}$ parcouru dans le sens direct. Pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, calculer l'intégrale $\int_{\mathscr{C}} z^n dz$. Expliquer le cas particulier où $n=-1$.
3. Montrer $\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$, lorsque $\gamma(t)=2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \leqslant \pi e$, lorsque $\gamma(t)=e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Exercice 2 (Intégrale elliptique)

Soient deux réels strictement positifs a et b, on pose $\gamma = a\cos(t)+ib\sin(t)$ pour $t \in [0,2\pi]$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ et en déduire : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 3 (Calcul d'une intégrale classique)

On paramètre le cercle C_r de centre 0 et de rayon $r>0$ du plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique en définissant pour $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t)$ comme le point d'intersection de la droite d'équation $y=t(x+r)$ avec le cercle C_r différent de $-r$.

1. Faire un dessin et montrer que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.
2. Vérifier que ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.
3. En déduire que
$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$
4. En déduire que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Exercice 4 (Existence de primitive)

Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus [0,1]$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$.

1. Ω est-il un ouvert étoilé ?

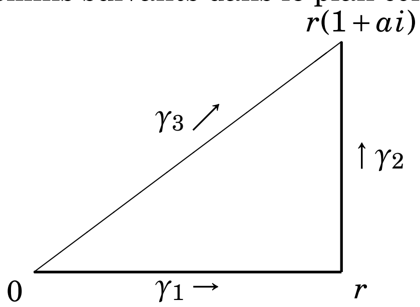
2. La fonction $F : z \mapsto \mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ est-elle bien définie et continue sur Ω ?

3. Montrer que pour tout lacet γ tracé dans Ω, $\displaystyle\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.

2. Théorie de Cauchy

Exercice 5 ☆ (Calcul d'intégrales à l'aide d'un chemin fermé)

Soit a un nombre réel tel que $|a| \leqslant 1$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-z^2}$ et pour tout réel strictement positif r, les chemins suivants dans le plan complexe



1. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz$.

2. Montrer que $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leqslant \frac{1}{r}$.

3. En déduire

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+ai)^2t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{1+ia}.$$

4. En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

On pourra utiliser librement que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 6 (Calcul d'intégrales à l'aide de thm/formule Cauchy)

Calculer

$$\int_{\partial\mathbb{D}(0,2)} \frac{e^z}{(z-3)^2}dz \quad , \quad \int_{\partial\mathbb{D}(0,2)} \frac{e^z}{(z+1)}dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial\mathbb{D}(0,2)} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}dz.$$

Exercice 7 ☆
Soit $c \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On va montrer, sans calcul, à l'aide des Théorèmes de Cauchy que pour $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\int_{\partial \mathbb{D}(c,r)} \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i & z_0 \in \mathbb{D}(c,r), \\ 0 & z_0 \notin \overline{\mathbb{D}}(c,r). \end{cases}$$

1. Le cas $z_0 \notin \overline{\mathbb{D}}(c,r)$ est le cas facile, le faire !

2. Supposons que $z_0 \in \mathbb{D}(c,r)$. Deux solutions (au moins) :

a. Montrer que pour tout R grand :

$$\int_{\partial \mathbb{D}(c,r)} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\partial \mathbb{D}(z_0,R)} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

b. Trouver un ouvert étoilé $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}$, une suite de chemins $(\gamma_n)_n$ tracés dans $\mathscr{U}$ telle que :

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z - z_0} dz \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_{\partial \mathbb{D}(c,r)} \frac{1}{z - z_0} dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_n} \frac{1}{z - z_0} dz \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 2\pi i.$$

Exercice 8
Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui vérifie la formule de la moyenne. Soit $z \in \mathscr{U}$ et $\rho > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z,\rho) \subset \mathscr{U}$. Montrer que :

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\partial \mathbb{D}(z,\rho)}.$$

On dit que f vérifie la formule du maximum.

3. Connexité

Exercice 9 ☆☆ (Connexité)
Le but de cet exercice est de montrer qu'un Ω ouvert de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement s'il est connexe par segments.

1. Soit Ω un ouvert connexe par arcs, c'est à dire tel que pour tout couple (a,b) de points de Ω, il existe un arc (chemin continue) qui joint a et b.

Soit $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$ deux ouverts disjoints tels que $\Omega = \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$. Soit a un point de $\mathscr{O}_1$, b un point de $\mathscr{O}_2$ et γ un arc tracé dans Ω, joignant a à b. En considérant :

$$\begin{aligned} \mathscr{U}_1 &:= \{t \in [0,1] \mid ta + (1-t)b \in \mathscr{O}_1\} \\ \mathscr{U}_2 &:= \{t \in [0,1] \mid ta + (1-t)b \in \mathscr{O}_2\} \end{aligned}$$

montrer que $\mathscr{U}_1 = \varnothing$ ou $\mathscr{U}_2 = \varnothing$

2. On suppose à présent que Ω est un ouvert connexe. On fixe un point o de Ω. On considère

$\mathscr{U} := \{z \in \Omega$ tel qu'il existe une concaténation de segments tracés dans Ω qui joint o à $z\}$.

Montrer que $\mathscr{U}$ et $\Omega \smallsetminus \mathscr{U}$ sont ouverts, puis que Ω est connexe par segments.

3. Résumer l'exercice.