Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°4
FONCTIONS HOLOMORPHES : BIHOLOMORPHISMES

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $GL(2,\mathbb{C})$, on associe l'application (transformation de Möbius)

$$\begin{array}{rccc} h_A: & \mathbb{C} \smallsetminus \{-d/c\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \smallsetminus \{a/c\} \\ & z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

On rappelle les notations $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\mathbb{C}_{\not\pi} := \mathbb{C} \smallsetminus]-\infty, 0]$ et $B = \{z \in \mathbb{C} | -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$.

1. Les transformations de Moëbius

Exercice 1 (Les transformations de Moëbius)

1. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rcl} h: \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}}) \\ A & \longmapsto & h_A \end{array}$$
est un morphisme de groupes.
2. En déduire une formule pour h_A^{-1}.
3. Calculer le noyau de h.
4. On note $\mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$ l'image de h. Montrer que h restreinte à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est encore surjective sur $\mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$.

Exercice 2 (La transformations de Cayley)

On choisit désormais la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

1. Expliciter le biholomorphisme $h = h_C$ et son inverse h^{-1}.
2. Montrer que
$$1 - |h(z)|^2 = \frac{4\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}$$
$$\mathrm{Im}(h^{-1}(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$
3. En déduire l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par h.

On rappelle que si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$ alors $\mathrm{Möb}(\mathscr{U})$ est le sous-groupe des transformations de Möbius qui préservent $\mathscr{U}$.

Exercice 3 (Transformations de Möbius de $\mathbb{H}$)

1. Montrer que si $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ alors h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

   On veut montrer la réciproque.

2. Soit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $h_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.
   - **a.** Supposons que $h_A(\infty) = \infty$. Montrer que h_A est une homothétie de rapport positif centrée en un point de $\mathbb{R}$ ou une translation horizontale.
   - **b.** On ne suppose plus que $h_A(\infty) = \infty$. Montrer que $h_A(\infty) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
   - **c.** En se ramenant au cas précédent, montrer que $\det(A) > 0$ et $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
   - **d.** En déduire que le morphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni A \mapsto h_A \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ est surjectif. Rappeler son noyau.
3. Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

Exercice 4 (Transformations de Möbius de $\mathbb{D}$)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{D}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} h_{\theta,w} : & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & z & \longmapsto & e^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{z-w}{1-\overline{w}z} \end{array}$$

On note $G = \{h_{\theta,w} \,|\, \theta \in \mathbb{R},\, w \in \mathbb{D}\}$ et $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ le groupe des transformations de Möebius qui préservent $\mathbb{D}$.

1. Soit $g \in \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ tel que $g(\infty) = \infty$. Montrer que g est une rotation de centre 0.
2. Montrer que pour tout $u \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, il existe $g \in G$ tel que $g(u) = \infty$.
3. En déduire que $G = \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$.

Exercice 5 (Disque épointé centré versus disque épointé quelconque)

Soit $w \in \mathbb{D}$. Trouver un biholomorphisme entre $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{D} \setminus \{w\}$.

Exercice 6 (Les disques, les demi-plans, c'est blanc bonnet et bonnet blanc)

1. Soit H et H' deux demi-plans ouverts de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une transformation de Moëbius qui envoie H sur H'.
2. Soit D et D' deux disques ouverts de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une transformation de Moëbius qui envoie D sur D'.
3. Soit $\mathscr{U}$ un disque ou un demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathscr{V}$ un disque ou demi-plan ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont biholomorphes.

Exercice 7 (Biholomorphismes entre domaines)

1. Montrer que l'application
$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}_{\not\pi} \\ z & \longmapsto & -z^2 \end{array}$$
est holomorphe et bijective.
2. En déduire un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{C}_{\not\pi}$.
3. En déduire un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur B.

Exercice 8

Trouver un biholomorphisme entre les ouverts :
$$\Omega_1 = \mathbb{D} \cap \mathbb{H} \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Exercice 9

Montrer que l'application :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ z & \longmapsto & \left(\dfrac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2 \end{array}$$
définit un biholomorphisme, où :
$$\mathscr{U} = \{\, z = re^{\mathrm{i}\theta} \mid 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi/m\}.$$

Exercice 10 ☆☆ (L'application de Koebe)

On considère l'application suivante :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{(1-z)^2} \end{array}$$

1. Soit $w \in \mathbb{C}$, chercher $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$.
2. Soit $w \in \mathbb{C}^*$, on note z_1, z_2 les deux solutions de l'équation $wz^2 - (2w+1)z + w$.
   a. Montrer qu'exactement l'une des assertions suivantes est vraie :
   — $|z_1| < 1$ et $|z_2| > 1$.
   — $|z_1| > 1$ et $|z_2| < 1$.
   — $|z_1| = |z_2| = 1$.
   b. Montrer que si $|z_1| = |z_2| = 1$ alors $4w + 1 \in \mathbb{R}_-$.
   c. Montrer que si $4w + 1 \in \mathbb{R}_-$ alors $|z_1| = |z_2| = 1$.
3. Montrer que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1/4]$ et que f est injective.
4. Trouver une application holomorphe $g : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 1/4] \to \mathbb{D}$ inverse de f.