Université de Rennes

Fonctions holomorphes (HOLO)

Feuille de TD n°3 Fonctions holomorphes : Fonctions spéciales

1. Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 1 (Trigonométrie hyperbolique)
On définit $\cosh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sinh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Déterminez leur rayon de convergence.
2. Exprimez cosh et sinh à l'aide de la fonction exponentielle.
3. Démontrez les formules d'addition pour $\cosh(z+w)$ et $\sinh(z+w)$ pour z et w dans $\mathbb{C}$.
4. Démontrez que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) \\ \sin(x+iy) &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

2. Fonction exponentielle

Exercice 2 (Exponentielle)

1. Calculer l'image de la droite $H_y = \{x+iy \mid x \in \mathbb{R}\}$ par la fonction exponentielle.
2. Calculer l'image de la droite $V_x = \{x+iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ par la fonction exponentielle.
3. Remarquer $H_y \perp V_x$ et $\exp(H_y) \perp \exp(V_x)$.

Exercice 3 (Exponentielle II)

1. Trouvez la valeur minimale de $|f(z)|$ où $f(z) = e^{z^2}$ sur le disque unité.
2. Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $2i\sin(z) = e^{-iz}(e^{2iz}-1)$. En déduire les zéros de la fonction sinus sur $\mathbb{C}$ et en particulier que la fonction sinus ne s'annule que pour des valeurs réelles.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes : $e^z = -5$; $\sin(z) = 2$.

3. Applications logarithmes

On rappelle que $\mathbb{C}_{\not\pi} := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$ et que Log désigne la branche principale du logarithme définie sur $\mathbb{C}_{\not\pi}$.

Exercice 4 (Propriétés de la branche principale du logarithme)

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ le nombre complexe $\exp(z)$ est-il dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\not\pi}$?
2. Rappelez la définition de Log sur $\mathbb{C}_{\not\pi}$ vue en cours.
3. Notons $B = \{z \in \mathbb{C}, -\pi < Im(z) < \pi\}$. Vérifiez que exp envoie B dans $\mathbb{C}_{\not\pi}$ et Log envoie $\mathbb{C}_{\not\pi}$ dans B. En déduire que $\exp : B \to \mathbb{C}_{\not\pi}$ et $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_{\not\pi} \to B$ sont des applications holomorphes réciproques l'une de l'autre.
4. Trouvez $z, w \in \mathbb{C}_{\not\pi}$, tels que $\mathrm{Log}(zw) \neq \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$.
5. Montrez que pour $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\mathrm{Re}(w) > 0$, on a $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(w)$.

Exercice 5 (Une autre application logarithme ?)

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \ell_{\text{arctan}}: & \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z=x+iy & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan(y/x). \end{array}$$

1. Montrer que ℓ_{arctan} est holomorphe.
2. L'application ℓ_{arctan} coïncide-t-elle avec la branche principale du logarithme sur $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\}$?
3. L'application ℓ_{arctan} est-elle un logarithme sur $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)<0\}$?

4. Fonctions puissances

Exercice 6 Puissance

Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, on définit la fonction *puissance* α sur $\mathbb{C}_{\not\pi}$ par :

$$z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}(z)}.$$

1. Calculer $\mathrm{Log}(i)$.
2. Calculer i^i.
3. Démontrer que pour tout α et β fixés dans $\mathbb{C}$ et $z\in\mathbb{C}_{\not\pi}$,
$$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1} \text{ et } z^{\alpha+\beta}=z^\alpha z^\beta.$$
4. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :
   a. $z\longmapsto z^{1/2}$
   b. $z\longmapsto(1-z)^{1/3}$.

Exercice 7

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$. On pose :

$$u_0=1 \qquad \text{et} \qquad u_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

On considère la série entière $f=\sum u_n z^n$.

1. Quel est le rayon de convergence de f ?
2. Montrez que pour tout z dans le disque de convergence, on a $f'(z)(1+z)=\alpha f(z)$.
3. Montrez que pour tout z dans le disque de convergence, on a $f(z)=(1+z)^\alpha$, où $(1+z)^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Log}(1+z)}$. *On pourra utiliser librement le fait suivant : si f holomorphe sur un ouvert connexe vérifie $f'=0$ alors f est constante. Même si le cours n'en est pas encore là. Cela ne va pas tarder...*

5. Arcsinus holomorphe

Exercice 8 ☆☆ (Arcsinus)

Soit $\mathscr{U}\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Une détermination holomorphe de l'arcsinus sur $\mathscr{U}$ est une fonction $f:\mathscr{U}\to\mathbb{C}$ holomorphe telle que pour tout $z\in\mathscr{U}$, $\sin(f(z))=z$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de l'arcsinus sur $\mathscr{U}$ alors $-1\notin\mathscr{U}$ et $1\notin\mathscr{U}$.
2. Soit $\mathscr{U}$ un ouvert ne contenant ni 1, ni -1 et $f:\mathscr{U}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   a) f est une détermination holomorphe sur $\mathscr{U}$ de l'arcsinus.
   b) Il existe une fonction holomorphe $g:\mathscr{U}\to\mathbb{C}$ telle que pour tout $z\in\mathscr{U}$ on a $g(z)^2=1-z^2$ et $e^{if(z)}=iz+g(z)$.
3. Montrer que dans ce cas, $f'=\frac{1}{g}$.
4. On pose $\mathscr{U}=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R},|z|\geqslant 1\}$. Montrer qu'il existe sur $\mathscr{U}$ une unique détermination holomorphe de l'arcsinus satisfaisant $f(0)=0$.