



1. RAPPELS SUR LES DIFFÉRENTS MODES DE CONVERGENCE

Exercice 1 🏠 (Convergences de suites et séries de fonctions)

- Rappelez les définitions de convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- Étudiez la convergence des fonctions $z \rightarrow z^n$ sur $B(0, 1)$.
- Rappelez les définitions de convergence uniforme et normale d'une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ définies sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Exercice 2 (La fonction ζ de Riemann)

On considère la série $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$. Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, on note $R_\sigma = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq \sigma\}$.

On rappelle que la notation n^s signifie $n^s := e^{s \ln(n)}$ et est bien définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{C}$.

- Calculez $|n^s|$.
- Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur R_σ , pour tout $\sigma > 1$.
- Déduisez-en que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tous les compacts de $\{\operatorname{Re}(s) > 1\}$.

Exercice 3 ☆☆ (La fonction η de Dirichlet)

On considère la série $\eta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$.

- Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge normalement sur R_σ , pour $\sigma > 1$.
- Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ **converge uniformément sur les compacts de $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}$** .
Vérifiez au passage que la convergence n'est pas normale.
- Montrez que $\eta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s})$.
- Montrez que $\zeta(s) \rightarrow \infty$ lorsque $s \rightarrow 1^+$.

Exercice 4 (Un autre exemple)

- Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{z+n}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- La convergence est-elle normale?

2. RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Exercice 5 (Rayons de convergence via les critères de Cauchy et d'Alembert)

1. Donnez le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

$$\exp(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n z^n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad \sum_{n \geq 1} n \pi^n z^n$$

2. Lorsque R est fini, étudiez le comportement des séries ci-dessus en $z = R$.

Exercice 6 (Opérations sur les rayons de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2 .

- Montrez que le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur à $\min(R_1, R_2)$ avec égalité si $R_2 \neq R_1$. Exemples ?
- Montrez que le rayon de convergence de $\sum (a_n b_n) z^n$ est supérieur à $R_1 R_2$.

Exercice 7 ☆ (DSE sur \mathbb{R})

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^∞ . On suppose que pour tout $a > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que, la suite $(\|f^{(n)}\|_{[-a, a]} \rho^n)_n$ est bornée.

- Montrez que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est infinie.
- Montrez que la somme de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ restreinte à \mathbb{R} coïncide avec la fonction f .
La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ s'appelle le développement en série entière de f .
- Déduisez-en que les développements en série entière des fonctions \exp , \sin et \cos .

En utilisant la définition (bientôt archaïque) suivante pour \exp : \exp est l'unique fonction telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. Pour \sin et \cos on utilisera que \sin et \cos vérifient $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, sont bornées et leurs valeurs en 0.

Exercice 8 ☆ (DSE sur $]-1, 1[$)

- Montrez que \arctan et $x \mapsto \ln(1+x)$ admettent un développement en série entière par une série entière de rayon de convergence égale à 1.
- Rappelez la formule de Taylor à l'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \neq 0$ avec votre reste préféré. On admettra que pour tout $x \in]-1, 1[$ le reste de Taylor tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.
- Déduisez-en les développements en série entière de \arcsin et \arccos .

Exercice 9 🏠 (Dérivation)

Montrez que pour tout entier naturel k et tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} z^{n-k}.$$

3. SÉRIES ENTIÈRES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 10 🏠 (Résolution d'une équation différentielle à l'aide de séries entières)

Cherchez des solutions de $y' = y$ ou $y' = -y^2$ sous la forme d'un polynôme ou d'une série entière, définie sur un intervalle de \mathbb{R} , puis sur un disque complexe. *On n'utilisera surtout pas le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Exercice 11 ☆🏠 (Développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle)

1. Montrez que \arcsin^2 vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy'(x) = 2$ sur $] -1, 1[$.
2. En admettant (ou démontrant) que \arcsin^2 est développable en série entière sur cet intervalle, déduisez-en une condition nécessaire sur ses coefficients.
3. Donnez un développement en série entière de $(\arcsin)^2$.

4. TRANSFORMATION D'ABEL

Exercice 12 🏠 (Un petit dessin et un petit calcul à faire à la maison)

Soit $0 < \theta < \pi/2$, on définit :

$$\Delta_\theta = \{z \in \mathbb{B}(0, 1) \mid \exists 0 < \rho < \cos(\theta), \exists \varphi \in [-\theta, \theta], z = 1 - \rho e^{i\varphi}\}$$

1. Dessinez Δ_θ .
2. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall z \in \Delta_\theta, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

Ind : L'inégalité suivante est triviale

$$\forall z \in \mathbb{B}(0, 1), \quad \frac{1}{1-|z|} \leq \frac{2}{1-|z|^2}.$$

Exercice 13 ☆☆ (Théorème d'Abel-Dirichlet)

Soit $\sum u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

1. Remarquez que si la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B}(0, 1)$.

On examine à présent, le cas où la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, mais pas absolument. Soit $0 < \theta < \pi/2$, on définit :

$$S_\theta = \overline{\Delta_\theta} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$$

2. Nous allons démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ converge uniformément sur S_θ .

- a. On pose $s_n = \sum_{k \geq n} u_k$. Établissez l'égalité (transformation d'Abel) suivante :

$$\forall z \in S_\theta, \forall N \geq 1, \quad \sum_{n \geq N} u_n z^n = s_N z^N + (z-1) \sum_{n \geq N} s_{n+1} z^n$$

- b. Déduez-en que :

$$\forall z \in S_\theta, \forall N \geq 1, \quad \left| \sum_{n \geq N} u_n z^n \right| \leq |s_N| + \frac{|1-z|}{1-|z|} \sup_{n \geq N} |s_n|$$

- c. Concluez (à l'aide de l'exo 12).

3. Déduez-en l'énoncé suivant : Soit $\sum u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$, on note $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ sa somme. On suppose qu'il existe z_0 vérifiant $|z_0| = R$ tel que la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n z_0^n$ converge. Alors, on a :

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in \Delta_{z_0, \theta, r}} f(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z_0^n$$

où $\Delta_{z_0, \theta, r}$ est le cône auquel vous pensez (Dessinez-le).

4. Calculez les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5. SÉRIES GÉNÉRATRICES

Exercice 14 🏠 (Série génératrice d'une variable aléatoire entière)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Sa fonction génératrice de X est la fonction g_X définie par

$$g_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) s^n \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq 1.$$

Elle caractérise la loi de X . Si X et Y sont deux v.a. à valeurs entières indépendantes, alors rappelons que

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X) \mathbb{E}(s^Y) = g_X(s) g_Y(s).$$

1. Vérifiez que la fonction génératrice d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est

$$g(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (ps + 1 - p)^n$$

2. Vérifiez que la fonction génératrice d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est $g(s) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$.

3. Quelle est la loi d'une somme de deux v.a. entières indépendantes de lois $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$?

4. Quelle est la loi d'une somme de deux v.a. entières indépendantes de lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$?