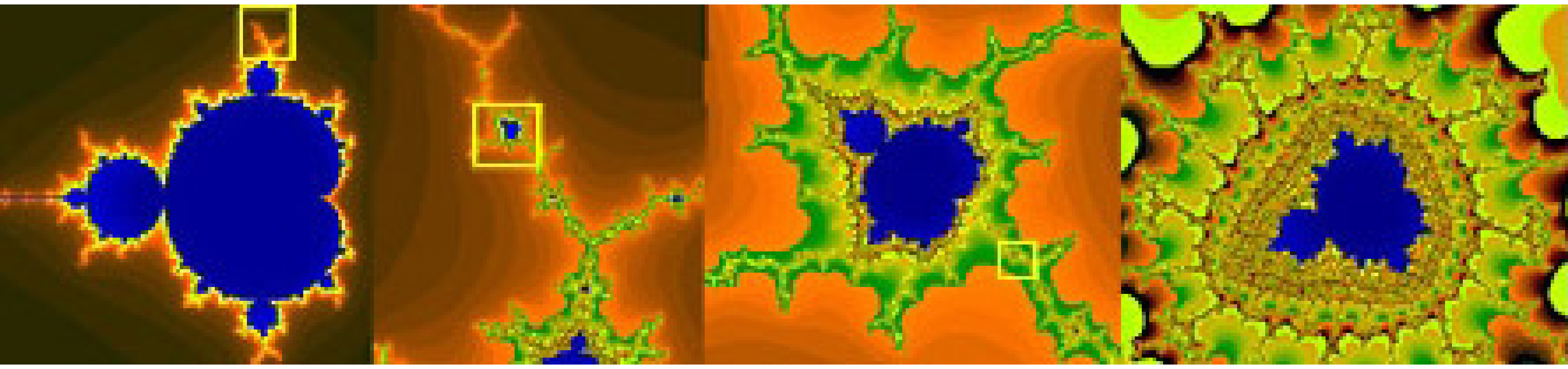
Fonctions holomorphes



Pour la Licence 3 - Mathématiques

de l'Université de Rennes

Ce polycopié de cours est basé sur un polycopié réalisé par Anna Lenzhen. Il s'inspire beaucoup des livres de Remmert et Ullrich, cité avant le chapitre 1.

Le template utilisé pour le rendu du polycopié est le Legrand Orange Book disponible sur le web à l'adresse suivante :
`https://www.latextemplates.com/template/the-legrand-orange-book`

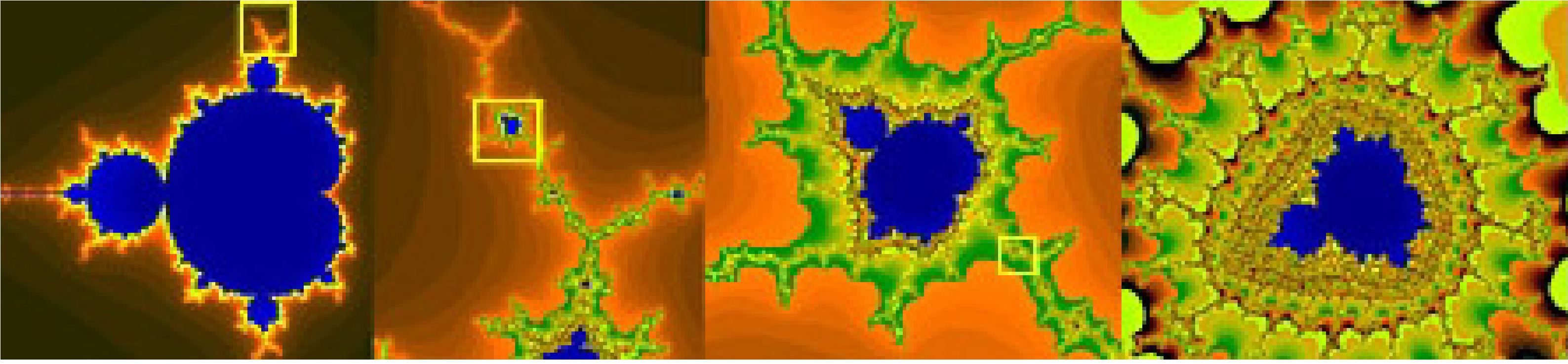
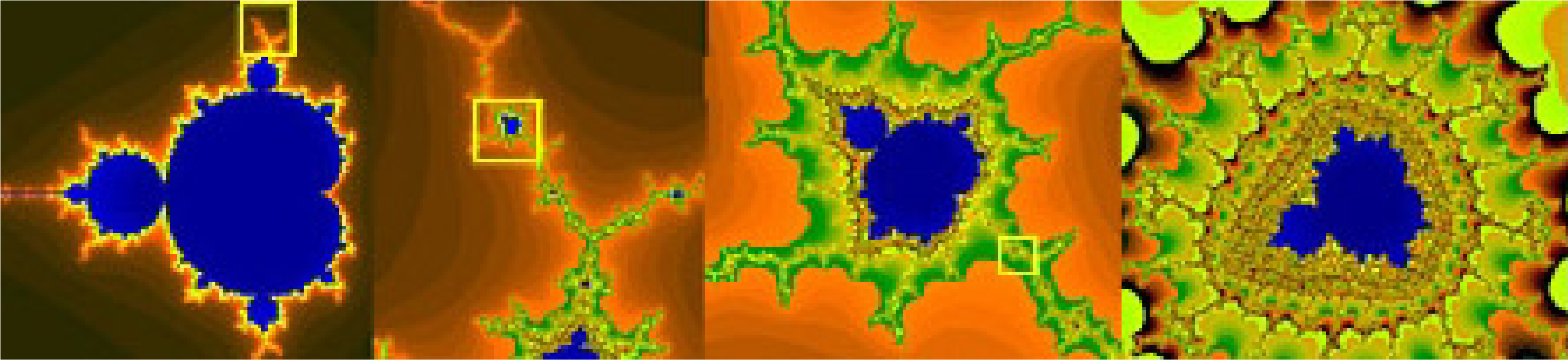


Table des matières

Je conseille les livres suivants, les deux premiers sont des livres de "complément de cours" (pour aider à la compréhension du cours, avoir un autre point de vue en restant proche du contenu du cours), les deux derniers des livres "pour aller plus loin" (voir beaucoup plus loin) :

1. **Complex made simple** de *Ullrich* (Chapitre 1 à 5).
   (a) Le chapitre 1 sera vu en dernier.
   (b) Un étudiant motivé peut tout lire.
2. **Theory of Complex functions** de *Remmert* (On va tout survoler)
   (a) Chapitre 0 plein de révisions.
   (b) Beaucoup de points historiques.
   (c) Le point important du chapitre 1 sera fait en dernier.
   (d) Beaucoup de rappels à chaque chapitre.
3. **Analyse complexe** de *Amar et Matheron* (Chapitre 3, 4, 8)
   (a) Le chapitre 1, c'est pas mauvais de le lire.
   (b) On en ferra moins à chaque fois dans chaque chapitre.
   (c) Les chapitres 5, 6 et 7 sont intéressants, je conseille fortement le chapitre 5.
   (d) Le livre est entièrement accessible si on est motivé.
4. **Analyse réelle et complexe** de *Rudin* (Chapitre 10, un peu de 11 et 12)
   (a) Un grand classique mais beaucoup plus difficile.



1. Dérivabilité complexe

I Rappel : Topologie métrique, un peu de vocabulaire pratique

Dans ce cours nous allons étudier des fonctions définies sur $\mathbb{C}$ ou sur une partie de $\mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

La fonction $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $d(z,w) = |z-w|$ est la métrique euclidienne de $\mathbb{C}$.

Dans tout ce cours, on utilisera des notions de topologie métrique (Cf cours TOPG - Topologie générale) sur l'espace métrique $(\mathbb{C}, d(\cdot,\cdot))$. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on note :

$$\mathrm{B}(z,r) = \mathbb{D}(z,r) = \{w \in \mathbb{C}, |z-w| < r\}$$

la boule ouverte de rayon r centrée en z et on note :

$$\overline{\mathrm{B}}(z,r) = \overline{\mathbb{D}}(z,r) = \{w \in \mathbb{C}, |z-w| \leqslant r\}$$

la boule fermée de rayon r centrée en z.

Définition 1.1 Un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ est ouvert (dans $\mathbb{C}$) si pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe $r > 0$ tel que la boule $\mathrm{B}(z,r)$ est contenue dans $\mathcal{U}$.
Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé (dans $\mathbb{C}$) si $F^c = \mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.

Proposition 1.2 Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si pour tout suite convergente $F \ni z_n \to z_\infty$, on a $z_\infty \in F$.

■ **Exemple 1.3** Les boules ouvertes sont ouvertes. Les boules fermées sont fermées. ■

Proposition 1.4
- Une union quelconque d'ouverts est ouverte.
- Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.
- Une union finie de fermés est fermée.

Corollaire 1.5 Soit $A \subset \mathbb{C}$,
- l'intersection des fermés contenant A est un fermé, noté $\overline{A}$, appelé *adhérence de* A. C'est le plus petit fermé contenant A.
- Avec des symboles : $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé}} F$.
- l'union des ouverts contenu dans A est un ouvert, noté $\mathring{A}$ ou $\mathrm{Int}(A)$, appelé *l'intérieur de* A.
- Avec des symboles : $\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{U} \subset A, \mathcal{U} \text{ ouvert}} \mathcal{U}$.

Proposition 1.6 L'adhérence de X est l'ensemble des limites possibles des suites de points de X. L'intérieur de X est l'ensemble des points de X qui admettent un voisinage inclus dans X.

Démonstration. Cf cours TOPG. ∎

II Dérivabilité complexe

1 Rappel - limite

Définition 1.7 Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ et $w \in \overline{D}$. On dit que f *admet* $\ell \in \mathbb{C}$ *pour limite en* w et on écrit :

$$\lim_{z \to w} f(z) = \ell$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall z \in D, \qquad |z - w| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Définition 1.8 On dit que f est *continue* en w si $w \in D$ et f admet une limite en w.

▪ **Remarque 1.9** Si f est continue en w alors on a $\lim_{z \to w} f(z) = f(w)$. ▪

2 La $\mathbb{C}$-dérivabilité, c'est quoi ?

Définition 1.10 — $\mathbb{C}$-dérivabilité. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et w un point de $\mathcal{U}$. On dit que f est $\mathbb{C}$- *dérivable* en w si la fonction τ définie par

$$\tau(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \ z \in \mathcal{U} \setminus \{w\}$$

admet une limite au point w. Cette limite est alors appelée *dérivée de f* en w et notée $f'(w)$.

Proposition 1.11 — Caractérisation de la $\mathbb{C}$-dérivabilité. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $w \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application. LASSE :

1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en w,
2. il existe une application $f_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ continue en w telle que pour tout $z \in \mathcal{U}$
$$f(z) = f(w) + f_1(z)(z - w),$$
3. Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que pour tout h dans un voisinage de 0 :
$$f(w + h) = f(w) + ah + o(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

Démonstration. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en w, la fonction $f_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, \ z \in D \setminus \{w\} \\ f'(w), \ z = w \end{cases}$$

est continue en w et vérifie $f(z) = f(w) + f_1(z)(z - w)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$.

Réciproquement, soit $f_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue en w et telle que $f(z) = f(w) + f_1(z)(z - w)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$. Alors pour $z \in \mathcal{U} \setminus \{c\}$,

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = f_1(z),$$

et comme f_1 est continue en w, f est $\mathbb{C}$-dérivable en w et $f'(w) = f_1(w)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3), cf TD. ■

3 Premières propriétés

Proposition 1.12

1. Une application $\mathbb{C}$-dérivable en w est continue en w.
2. Une somme, un produit des applications $\mathbb{C}$-dérivables en w est $\mathbb{C}$-dérivable en w. Et,
$$(f + g)'(w) = f'(w) + g'(w) \qquad (fg)'(w) = f'(w)g(w) + f(w)g'(w)$$
3. L'inverse $\frac{1}{f}$ d'une application f qui est $\mathbb{C}$-dérivable en w et non-nulle en w est aussi $\mathbb{C}$-dérivable en w. Et,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(w) = -\frac{f'(w)}{f(w)^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(w) = \frac{f(w)g'(w) - f'(w)g(w)}{f(w)^2}$$

Démonstration. On peut voir facilement que $\mathbb{C}$-dérivabilité implique continuité, c'est à dire, si f est dérivable en w, elle est continue en w. En effet, puisque il existe f_1 continue en w telle que $f(z) = f(w) + f_1(z)(z-w)$, on conclut que f est continue en w.

Faire la somme au tableau.

Le produit sera fait en TD.

L'inverse :

$$\frac{\frac{1}{f(w+h)} - \frac{1}{f(w)}}{h} = \frac{f(w) - f(w+h)}{f(w)f(w+h)h} = -\frac{f(w+h) - f(w)}{h} \frac{1}{f(w)f(w+h)} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{f'(w)}{f(w)^2}.$$

■

4 Exemples

Proposition 1.13

1. Les polynômes sont $\mathbb{C}$-dérivables sur $\mathbb{C}$.
2. Les fractions rationnelles (i.e. les quotients de polynômes) sont $\mathbb{C}$-dérivables sur leurs domaines de définition.

Démonstration. La fonction $z \mapsto z$ est clairement $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, la proposition est donc une conséquence directe de la proposition précédente. Néanmoins, on refait le calcul pour $z \mapsto z^m$ pour le plaisir :

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction $z \to z^m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $z = w + h$, alors

$$\begin{aligned} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} &= \frac{(w+h)^m - w^m}{h} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} h^{k-1} w^{m-k} \\ &= m w^{m-1} + h \,\text{Polynôme}(h) \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} m w^{m-1}. \end{aligned}$$

■

5 Contre-exemples

Proposition 1.14

1. La conjugaison, $f(z) = \bar{z}$, n'est dérivable en aucun point.
2. Les fonctions parties réelles et imaginaires $z \mapsto \text{Re}(z), \text{Im}(z)$ et la fonction module $z \mapsto |z|$ ne sont dérivables en aucun point.

Démonstration. En effet, soit $w \in \mathbb{C}$.

$$\frac{f(w+h)-f(w)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Si $h \in \mathbb{R}$, alors $\frac{\overline{h}}{h} = 1$, mais si $h \in i\mathbb{R}$, alors $\frac{\overline{h}}{h} = -1$. On en conclut que $\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ n'admet pas de limite lorsque $z \to w$.

Si $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ était $\mathbb{C}$-dérivable en w alors comme $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ alors $z \mapsto \overline{z}$ serait $\mathbb{C}$-dérivable en w, absurde. Idem, pour la partie imaginaire.

Si $z \mapsto |z|$ était $\mathbb{C}$-dérivable en zéro alors la fonction usuelle valeur absolue serait $\mathbb{R}$-dérivable en zéro, ce qui n'est pas le cas. Si $z \mapsto |z|$ est dérivable en $w \neq 0$ alors $z \mapsto |z|^2 = z\overline{z}$ est dérivable en w, donc $z \mapsto \overline{z}$ est dérivable en w, absurde. ■

III Fonctions holomorphes

1 C'est quoi ?

Définition 1.15 — Holomorphie. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *holomorphe sur* $\mathcal{U}$ si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathcal{U}$.

Notation 1.1. *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, on notera $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.*

Proposition 1.16 L'ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ est une $\mathbb{C}$- algèbre unitaire.

Démonstration. Il faut montrer que $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ est un anneau (stable par somme et produit), un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (stable par somme et multiplication par un scalaire) et que la fonction constante égale à 1 est toujours dans $\mathcal{H}(\mathcal{U})$. Tout a déjà été fait. ■

▪ **Remarque 1.17** On verra plus tard que $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ est un anneau intègre. ▪

2 Exemples

1. Les polynômes sont dans $\mathcal{H}(\mathcal{U})$, pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$.
2. Les fractions rationnelles sont holomorphes sur leurs domaines de définition.

3 Dérivation des composées

Théorème 1.18 — Dérivation des fonctions composées. Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ des ouverts et $g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $f : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Alors la fonction $f \circ g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et pour tout $c \in \mathcal{U}$,

$$(f \circ g)'(w) = f'(g(w))g'(w).$$

Démonstration. Exo TD. Il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tel que :

$$g(w+h) = g(w) + ah + h\varepsilon_1(h) \qquad f(g(w)+k) = f(g(w)) + bk + k\varepsilon_2(k)$$

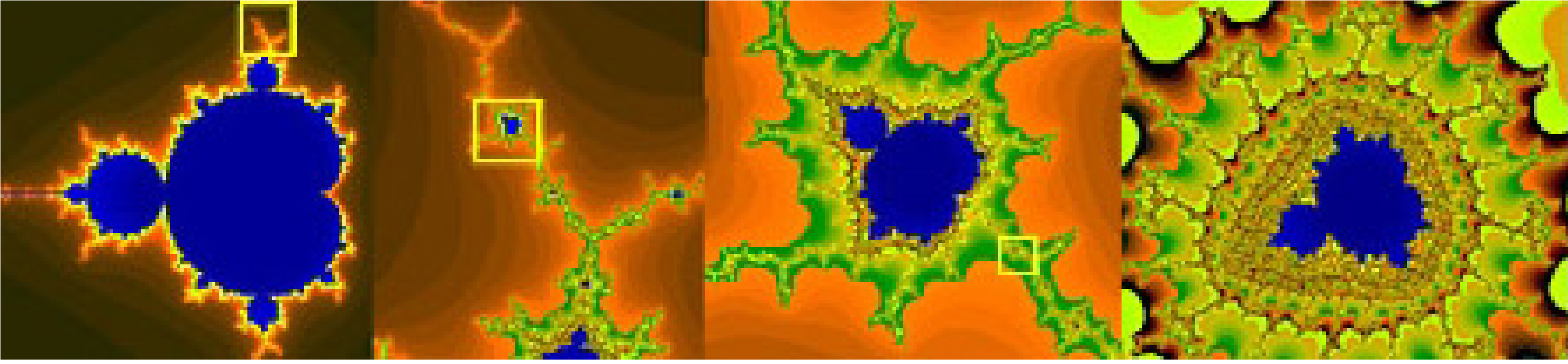
Ainsi,

$$\begin{aligned}
f \circ g(w+h) =& f(g(w) + \underbrace{ah + h\varepsilon_1(h)}_{=k}) \\
=& f \circ g(w) + b\big(ah + h\varepsilon_1(h)\big) + \big(ah + h\varepsilon_1(h)\big)\varepsilon_2(ah + h\varepsilon_1(h)) \\
=& abh + h\varepsilon_3(h)
\end{aligned}$$

Ou avec des o :

$$\begin{aligned}
f \circ g(w+h) =& f(g(w) + \underbrace{ah + o(h)}_{=k}) \\
=& f \circ g(w) + b\big(ah + o(h)\big) + \big(ah + o(h)\big)o(ah + o(h)) \\
=& abh + o(h)
\end{aligned}$$

∎



2. Séries entières

I Modes de convergence de suites et séries de fonctions

1 Convergence simple, uniforme, etc ... pour les fonctions

Soit $X \subset \mathbb{C}$, $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions et $f_\infty : X \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. **Convergence simple.**

Définition 2.1 La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* sur X vers f_∞ lorsque :

$$\forall x \in X, \qquad f_n(x) \to f_\infty(x).$$

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathbb{N}, \qquad |f_n(x) - f_\infty(x)| < \epsilon.$$

■ **Remarque 2.2** Cette convergence ne conserve pas la continuité (Penser à $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$). ■

2. **Convergence uniforme.**

Définition 2.3 La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* sur X vers f_∞, lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant \mathbb{N}, \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_\infty(x)| < \epsilon.$$

On peut aussi écrire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathbb{N}, \qquad \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_\infty(x)| < \epsilon.$$

3. **Convergence uniforme locale.**

Définition 2.4 La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément localement sur* X vers f_∞ lorsque pour tout $x \in X$, il existe $\mathcal{U}_x$ un voisinage de x dans X tel que la suite $(f_n|_{\mathcal{U}_x})$ converge uniformement vers $f_\infty|_{\mathcal{U}_x}$

On rappelle sans preuve le théorème suivant :

Théorème 2.5 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$. Si les f_n convergent uniformément localement vers f_∞ sur X, alors f_∞ est continue dans X.

Démonstration. Cf cours AN4. Exo le refaire. ∎

4. **Convergence uniforme sur tous les compacts.**

Définition 2.6 La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $f_\infty : X \to \mathbb{C}$ *sur tout compact de* X lorsque pour tout compact K de X, la suite $(f_n|_K)$ converge uniformément vers $f_\infty|_K$.

■ **Remarque 2.7** Si X est localement compact [1] (p.ex X est un ouvert de $\mathbb{C}$) alors la convergence uniforme locale sur X est équivalente à la convergence uniforme sur les compacts de X. ■

Bien entendu, on a les implication suivantes :

$$\text{cv uniforme} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{cv uniforme locale}\\ \Updownarrow \\ \text{cv uniforme sur les compacts}\end{array} \quad \Rightarrow \text{cv simple}$$

2 Interlude : norme infinie

Si $f : X \to \mathbb{C}$ est une application et $A \subset X$, on note :

$$\|f\|_{\infty,A} = \|f\|_A = \sup_{z\in A} |f(z)|$$

On note $\mathcal{B}(A)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur A. L'application $\mathcal{B}(A) \ni f \mapsto \|f\|_A$ est une norme sur $\mathcal{B}(A)$ (pas sur $\mathcal{B}(X)$), muni de cette norme $\mathcal{B}(A)$ est un espace de Banach.

Si K est compact alors le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}(K)$ est un fermé de $(\mathcal{B}(K), \|\cdot\|_K)$, donc un espace de Banach.

■ **Remarque 2.8** Soit $(f_n)_n$ et f_∞ dans $\mathcal{B}(X)$ alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif}} f_\infty$ si et seulement si $\|f_n - f_\infty\|_X \to 0$. ■

3 Convergence simple, uniforme, normale, etc ... pour les séries

Soit $X \subset \mathbb{C}$ et $u_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions.

1. **Convergence simple, uniforme, etc ...**

1. i.e. X est séparé et tout point admet un voisinage compact.

Définition 2.9
La série $\sum u_n$ *converge truc* sur X lorsque la suite de fonctions des sommes partiels $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ converge truc. Avec truc = simplement, uniformément, localement uniformément ou uniformément sur les compacts.

Dans n'importe lequel de ces cas, on appelle la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *la somme* de la série.

2. **Convergence normale**

Définition 2.10 La série $\sum u_n$ *converge normalement* sur X lorsque la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_X < \infty$. Autrement dit, si et seulement si la série $\sum u_n$ de l'espace de Banach $\mathcal{B}(X)$ est absolument convergente.

3. **Convergence normale locale**

Définition 2.11 La série $\sum u_n$ *converge localement normalement* sur X lorsque pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_x \ni x$ tel que la série $\sum u_{n|_{\mathcal{U}_x}}$ converge normalement (sur $\mathcal{U}_x$).

4. **Convergence normale sur tous les compacts**

Définition 2.12 La série $\sum u_n$ *converge normalement sur tous les compacts de* X lorsque pour tout compact $K \subset X$, la série $\sum u_{n|_K}$ converge normalement (sur K).

Théorème 2.13 Si X est un ouvert, $u_n \in \mathcal{C}(X)$ et la série $\sum u_n$ converge normalement sur les compacts de X, alors sa somme est continue.

II C'est quoi une série entière ?

1 Definition

Définition 2.14 Une *série entière* de la variable z est une série de terme générale $z \mapsto u_n z^n$, $u_n \in \mathbb{C}$. On la note

$$\sum u_n z^n.$$

Définition 2.15 Une série entière est dite *convergente* si elle converge en au moins un autre point que 0.

2 Exemples

1. Les polynômes donnent des séries entières convergentes sur $\mathbb{C}$.
2. La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et définit une fonction célèbre.
3. La série entière $\sum z^n$ converge pour tout $z \in \mathrm{B}(0,1)$.
4. La série entière $\sum n^n z^n$ n'est pas convergente.

Démonstration. En effet, pour que si cette série converge en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors la suite $(n^n(z_0)^n)_n$ est bornée, mais si $|n^n(z_0)^n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $|z_0| \leqslant \frac{M'}{n}$ pour tout n entier, et donc $z_0 = 0$. ■

III Rayon de convergence

▪ **Rappel 2.16** Soit $\sum u_n$ une série numérique (i.e. $u_n \in \mathbb{C}$)
- Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.
- $\sum u_n$ est dite *grossièrement divergente* lorsque $u_n \not\to 0$.

▪

1 Le lemme d'Abel

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, on pose :

$$R_{\text{bornée}} = \sup\{t \geqslant 0 \mid \text{la suite } (u_n t^n)_n \text{ est bornée}\}$$
$$R_{\text{sommable}} = \sup\{t \geqslant 0 \mid \sum_{n\geqslant 0} u_n t^n < \infty\}$$

Lemme 2.17 — Lemme d'Abel. $R_{\text{bornée}} = R_{\text{sommable}}$.

▪ **Remarque 2.18** Il est clair que les ensembles $\{t \mid \text{la suite } (u_n t^n)_n \text{ est bornée}\}$ et $\{t \mid \sum_{n\geqslant 0} u_n t^n < \infty\}$ sont des intervalles de la forme $[0, R_*[$ ou $[0, R_*]$. ▪

Démonstration. On rappelle que sommable implique converge vers zéro qui implique bornée donc $R_{\text{sommable}} \leqslant R_{\text{bornée}}$.

Supposons $R_{\text{sommable}} < R_{\text{bornée}}$. Soit r, s tels que :

$$R_{\text{sommable}} < r < s < R_{\text{bornée}}$$

On a $\sum_{n\geqslant 0} u_n r^n = \infty$ mais $u_n r^n = \underbrace{u_n s^n}_{\text{bornée}} \Big(\underbrace{\tfrac{r}{s}}_{<1}\Big)^n \leqslant \underbrace{M\left(\tfrac{r}{s}\right)^n}_{\text{sommable}}$, absurde. ■

2 Le rayon de convergence, c'est quoi ?

Théorème 2.19 — Rayon de convergence. Soit $\sum u_n z^n$ une série entière. Soit

$$R = \sup\{t \geqslant 0, \mid \text{la suite } (u_n t^n)_n \text{ est bornée }\} = \sup\{t \geqslant 0, \mid \sum_{n\geqslant 0} |u_n| t^n < \infty\}$$

Alors
1. La série entière $\sum u_n z^n$ converge normalement sur les compacts de $\mathrm{B}(0,R)$.
2. La série numérique $\sum u_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \notin \overline{\mathrm{B}}(0,R)$.

On appelle $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ le *rayon de convergence* de $\sum u_n z^n$.

Démonstration.

1. Soit K un compact de $\mathrm{B}(0,R)$, il existe $s<R$ tel que $K\subset \mathrm{B}(0,s)$. Mais
$$\sum_{n\geqslant 0}\|u_n z^n\|_{\overline{\mathrm{B}}(0,s)}=\sum_{n\geqslant 0}|u_n|s^n<\infty.$$
La série $\sum u_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathrm{B}}(0,s)$, donc aussi sur K.
2. Si $|z|>R$. Par définition de R, $\sup|u_n z^n|=+\infty$, en particulier la suite $(u_n z^n)_n$ ne tend pas vers zéro, donc $\sum u_n z^n$ diverge grossièrement. ∎

Corollaire 2.20 Si $\sum u_n z^n$ converge en $z_0\neq 0$, alors la série converge normalement sur les compacts de $\mathrm{B}(0,|z_0|)$.

Démonstration. D'après le rappel, la suite $(u_n z_0^n)_n$ converge vers zéro , donc est bornée, donc $R\leqslant |z_0|$. ∎

▪ **Remarque 2.21** Le comportement au bord du disque n'est pas dicté par le rayon de convergence, tout est possible.

1. Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} z^n$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n^2}$ ont un rayon de convergence égale à 1.
2. Pour tout z tq $|z|=1$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ diverge (grossièrement).
3. Pour tout z tq $|z|=1$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.
4. Pour $z=1$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$ diverge. Pour tout $|z|=1$, $z\neq 1$ la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$ converge [2] (non absolument).

▪

3 lim inf, lim sup

Si $(x_n)_n$ est une suite de nombre réels, on définit :
$$s_n=\sup_{k\geqslant n} x_k \qquad i_n=\inf_{k\geqslant n} x_k$$
La suite $(s_n)_n$ est décroissante et la suite $(i_n)_n$ est croissante. Donc ces deux suites convergent dans $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Définition 2.22
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\limsup_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n} x_k \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\liminf_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} x_k$$

2. Pour $z=-1$, c'est le critère des séries alternées, pour z quelconque, voir le critère/transformation d'Abel.

Proposition 2.23 La suite $(x_n)_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Et dans ce cas :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Définition 2.24 Tout réel qui est limite d'une suite extraite de la suite $(x_n)_n$ est *une valeur d'adhérence de* $(x_n)_n$.

■ **Remarque 2.25** La liminf est la plus petite valeur d'adhérence, la limsup la plus grande. ■

■ **Remarque 2.26** Pour tout $\varepsilon > 0$,

1. Tous les termes de la suite $(x_n)_n$ sauf un nombre fini appartiennent à l'intervalle $]\liminf x_n - \varepsilon, \limsup x_n + \varepsilon[$.
2. Une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$ appartiennent à l'intervalle $]\liminf x_n - \varepsilon, \liminf x_n + \varepsilon[$.
3. Une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$ appartiennent à l'intervalle $]\limsup x_n - \varepsilon, \limsup x_n + \varepsilon[$.

■

4 Quelques formules de calcul du rayon de convergence

Comme on va travailler avec des quantités positives, on utilisera la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Cauchy-Hadamard

Théorème 2.27 — Formule de Cauchy-Hadamard. Le rayon de convergence d'une série

$$\sum u_n z^n$$

est

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|u_n|}} = \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}.$$

Démonstration. On note

$$L := \liminf_n \frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}.$$

1. Soit $t < L = \underline{\lim} \frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$t \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}.$$

D'où, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|u_n t^n| \leqslant 1$$

Ainsi, la suite $(u_n t^n)_n$ est bornée.

2. Soit $t > L$, donc $\frac{1}{t} < \frac{1}{L} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|}$, donc il existe $n_k \to +\infty$ tel que $\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \geqslant 1/t$. Autrement dit,
$$|u_{n_k}| t^{n_k} \geqslant 1.$$
Donc, la série $\sum |u_n| t^n$ diverge.
3. Donc $R = L$.

■

D'Alembert

Théorème 2.28 — Règle de d'Alembert. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ avec $u_n \neq 0$ pour tout n sauf un nombre fini. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$, alors
$$\liminf \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} \leqslant R \leqslant \limsup \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}.$$
En particulier, si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \to \ell \in [0, \infty]$ alors $R = \ell^{-1}$.

Démonstration. Soit $t > T = \limsup \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}$. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:
$$t \geqslant \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}$$
Soit $B := |u_{n_0}| t^{n_0} > 0$.
$$|u_{n_0+1}| t^{n_0+1} = |u_{n_0+1}| \cdot t \cdot t^{n_0} \geqslant |u_{n_0}| t^{n_0} = B.$$
On montre par récurrence que $|u_{n_0+k}| t^{n_0+k} \geqslant B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc la série numérique $\sum |u_n| t^n$ diverge. Donc $R \leqslant t$, ceci pour tout $t > T$, donc $R \leqslant T$.

Soit $t < S = \liminf \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}$. À partir d'un certain n_0, pour tout $n \geqslant n_0$, on a :
$$t \leqslant \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}.$$
Alors $|u_{n_0+1}| t^{n_0+1} = |u_{n_0+1}| t \cdot t^{n_0} \leqslant |u_{n_0}| t^{n_0}$. On montre par récurrence que $|u_{n_0+k}| t^{n_0+k} \leqslant |u_{n_0}| t^{n_0}$, donc la suite $(|u_n| t^n)_n$ est bornée. On conclut que $R \geqslant t$, ceci pour tout $t < S$ donc $R \geqslant S$. ■

5 Bilan

On a donc 3 méthodes pour calculer un rayon de convergence :
1. La définition : chercher R tel que :
   — Pour tout $t < R$, $(u_n t^n)_n$ est bornée,
   — Pour tout $t > R$, $(u_n t^n)_n$ n'est pas bornée.
2. Chercher la limite de la suite $\sqrt[n]{|u_n|}$. Une limsup suffit !
3. Chercher la limite de la suite $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$. Si pas de limite, alors on a juste des estimés du rayon de convergence.

IV Exemples

Quelques exemples de séries entières et leurs rayons.

1. La série géométrique $\sum z^n$ a $R = 1$ pour rayon de convergence (Les 3 méthodes s'appliquent trivialement) . Sa somme sur $\mathrm{B}(0,1)$ est $f(z) = \frac{1}{1-z}$. En effet :

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \quad \rightsquigarrow \quad \text{passage à la limite à } z \text{ fixé} \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2. La série $\sum \frac{z^n}{n^n}$ a $R = +\infty$ comme rayon de convergence. (La définition et Cauchy-Hadamard s'appliquent trivialement). La série converge donc normalement sur tous les compacts de $\mathbb{C}$.

3. La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ a $R = +\infty$ comme rayon de convergence. (La définition ou la règle de d'Alembert s'appliquent trivialement). La série converge donc normalement sur tous les compacts de $\mathbb{C}$.

   On définit
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

4. La série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$a $R = +\infty$ comme rayon de convergence. En effet, les coéfficients u_n de la série satisfont l'inégalité
$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n!}$$
   donc la série converge en tout point où la série exponentielle converge. Donc $R = +\infty$. On note la somme
$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

5. La série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ a $R = +\infty$ comme rayon de convergence, on raisonne comme dans le cas précédent. On note la somme
$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$
   On remarque que les fonctions $\exp(z), \cos(z), \sin(z)$ coïncident sur $\mathbb{R}$ avec les fonctions réelles $\exp(x), \cos(x)$ et $\sin(x)$.

   Formule d'Euler On vérifie facilement que
$$\exp(\mathrm{i}z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = 1 + \frac{\mathrm{i}z}{1!} - \frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).$$

6. La série logarithme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ a un rayon de convergence $R = 1$ par le

critère de d'Alembert. La somme

$$\lambda(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

coïncide (exo, le justifier) avec $\ln(1+x)$ quand $z = x \in]-1,1[$.

V Manipulation sur les séries entières

Définition 2.29 (Produit de Cauchy) Si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont deux suites, le *produit de Cauchy* des suites u et v est la suite $p = u * v$ définie par :

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

▪ **Rappel 2.30** On rappelle le corollaire suivant du théorème de sommation par paquets[3].

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries de termes $\geqslant 0$ alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} (u * v)_n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n\Big)$$

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries absolument convergentes alors $\sum (u*v)_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n\geqslant 0} (u * v)_n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n\Big)$$

▪

Théorème 2.31 Soit $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs $R_u, R_v > 0$. On pose $R_m = \min(R_u, R_v)$. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

— Le rayon de convergence R_Σ de la série entière $\sum(\alpha u_n + \beta v_n) z^n$ vérifie :

$$R_\Sigma \geqslant R_m.$$

— Pour tout $z \in \mathrm{B}(0, R_m)$, on a :

$$\sum_{n\geqslant 0} (\alpha u_n + \beta v_n) z^n = \alpha \sum_{n\geqslant 0} u_n z^n + \beta \sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$$

3. Ils l'ont vu ? Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et $(I_i)_i$ une partition de I.
— Si u_i sont $\geqslant 0$ alors $\sum_{i\in I} u_i = \sum_i \sum_{j\in I_i} u_j$.
— Si $\sum_{i\in I} |u_i| < \infty$ alors $\sum_{i\in I} u_i = \sum_i \sum_{j\in I_i} u_j$. .
Ici, $I = \mathbb{N}^2$ et $I_i = \{\ (p,q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p+q = i\}$

— Le rayon de convergence R_Π de la série entière $\sum (u*v)_n z^n$ vérifie :

$$R_\Pi \geqslant R_m.$$

— Pour tout $z \in \mathrm{B}(0, R_m)$, on a :

$$\sum_{n\geqslant 0} (u*v)_n z^n = \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n\Big)$$

▪ **Remarque 2.32** Si $R_u \neq R_v$ alors $R_\Sigma = R_m$, c'est faux pour R_Π, prendre $f = 1+z$ et $g = (1+z)^{-1}$. ▪

Démonstration. Pour la somme, voir la feuille de TD.

Pour le produit, soit $0 \leqslant r < R_m$, le rappel appliqué à la série de termes $\geqslant 0$ montre :

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} |u_k| r^k |v_{n-k}| r^{n-k} = \Big(\sum_{n\geqslant 0} |u_n| r^n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} |v_n| r^n\Big) < \infty$$

Donc, on peut donc appliquer le rappel à la série de termes complexes, on obtient :

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} u_k z^k v_{n-k} z^{n-k} = \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n\Big)$$

pour tout $z \in \mathrm{B}(0, R_m)$. ■

VI Holomorphie des séries entières.

Théorème 2.33
Si la série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme $f(z)$ est holomorphe sur $\mathrm{B}(0,R)$, et

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n u_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) u_{n+1} z^n.$$

Corollaire 2.34
Si la série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors :

— sa somme $f(z)$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans $\mathrm{B}(0,R)$.

— f est holomorphe dans $\mathrm{B}(0,R)$.

— Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

— Pour tout $k \geqslant 0$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geqslant k} k! \binom{n}{k} u_n z^{n-k}.$$

Démonstration du Théorème 2.33. On commence par le lemme suivant :

Lemme 2.35 Si la série entiére $\sum u_n z^n$ a R comme rayon de convergence, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} n u_n z^{n-1}$ a R pour rayon de convergence.

Démonstration. On note R', le rayon de convergence de la série $\sum n u_n z^{n-1}$:

$$R' = \sup\{t \geqslant 0, \sup\{n|u_n|t^{n-1}\} < +\infty\}.$$

Si la suite $(n|u_n|t^{n-1})$ est bornée pour un t fixe, alors la suite $(|u_n|t^n)$ est aussi bornée. Donc $R \geqslant R'$.

Dans l'autre sens, soit $r < R$. Pour tout $r < s < R$, $(|u_n|s^n)_n$ est une suite bornée. Donc la suite

$$|u_n|r^{n-1}n = \underbrace{|u_n|s^n}_{\text{suite bornée}} \cdot \underbrace{\left(\frac{r}{s}\right)^n}_{\text{rapidement } \to 0} \cdot \underbrace{\frac{n}{r}}_{\text{lentement } \to \infty}$$

est bornée. D'où $R' \geqslant R$.

∎

On pose :

$$g(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1}.$$

D'après le Lemme 2.35, g est bien définie sur $\mathrm{B}(0,R)$. Montrons que f est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathrm{B}(0,R)$ et $f' = g$.

Soit $w \in \mathrm{B}(0,R)$.

$$f(z) - f(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z^n - w^n) = (z-w)\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + zw^{n-2} + w^{n-1})$$

Soit $\varphi_n(z) := u_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + zw^{n-2} + w^{n-1})$. Les fonctions φ_n sont continues. On va montrer que la série $\sum \varphi_n$ converge normalement sur les compacts de $\mathrm{B}(0,R)$.

Soit r tel que $|w| < r < R$. Alors

$$\|\varphi_n(z)\|_{\mathrm{B}(0,r)} \leqslant |u_n| n r^{n-1}$$

mais $\sum |u_n| n r^{n-1}$ converge après le Lemme 2.35, donc $\sum \varphi_n$ converge normalement sur $\overline{\mathrm{B}}(0,r)$, donc converge normalement sur les compacts de $\mathrm{B}(0,R)$. Le Théorème 2.13 montre que la somme $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$ est continue, et on a [4] :

$$f(z) = f(w) + (z-w)\varphi(z)$$

donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en w et

$$f'(w) = \varphi(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n w^{n-1} = g(w).$$

∎

4. N.B. w est fixé.

VII Principe des zéros isolés

Théorème 2.36 — Principe des zéros isolés - V1 - SE.
Soit $f = \sum u_n z^n$ une série entière convergente non identiquement nulle. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas dans $\mathrm{B}(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$.

Lemme 2.37 Soit $f = \sum u_n z^n$ une série entière convergente dont l'un des coefficients est non-nul vérifiant $f(0) = 0$. Il existe un entier $k \geqslant 1$ et une série entière $g(z) = \sum v_n z^n$ convergente telle que :
- $f(z) = z^k g(z)$.
- $g(0) \neq 0$.

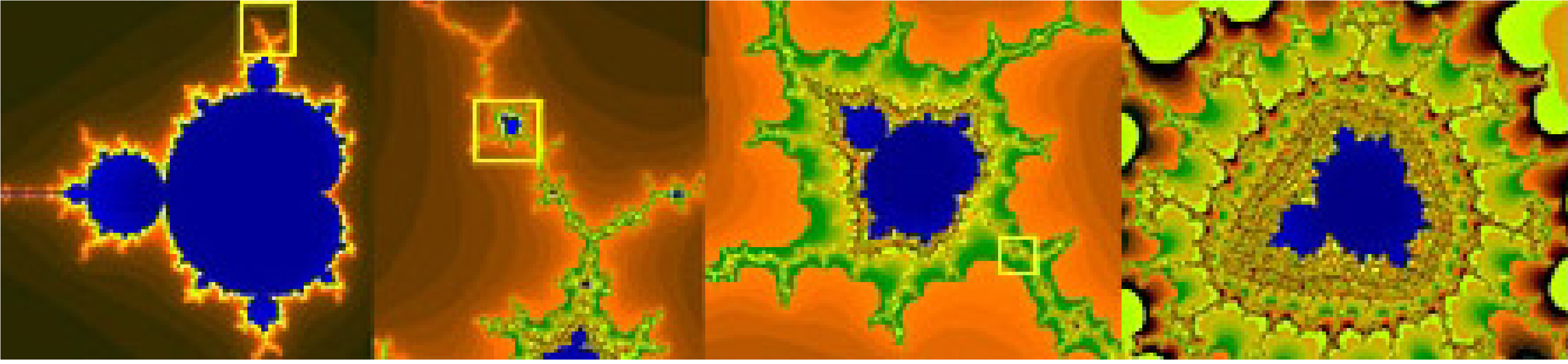
Démonstration. Soit $k = \min\{n,\ u_n \neq 0\}$. Les séries $\sum u_{n+k} z^n$ et $\sum u_n z^n$ ont le même rayon de convergence (Vérifiez !!!), on le note R.

Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+k} z^n$ la somme. On a bien $f(z) = z^k g(z)$ sur $\mathrm{B}(0,R)$ et $g(0) = u_k \neq 0$. ∎

Démonstration. Grace au lemme, on écrit $f(z) = z^k g(z)$ sur $\mathrm{B}(0,R)$ avec $g(0) \neq 0$. Alors g est holomorphe et donc continue sur $\mathrm{B}(0,R)$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $\mathrm{B}(0,\varepsilon)$. ∎

Théorème 2.38 Soit $f = \sum u_n z^n$ et $g = \sum v_n z^n$ deux série entières convergentes. Si $f(z) = g(z)$ sur un voisinage de 0 alors pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = v_n$.

Démonstration. La série entière $f - g$ s'annulle sur un voisinage de zéro donc tous ses coefficients sont nuls. ∎



3. Exemples de fonctions holomorphes

I Exponentielle

La fonction $\exp(z)$ ou e^z est la fonction définie par

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

elle a les propriétés suivantes :

1. e^z est définie sur $\mathbb{C}$ (on a vu déja que $R = \infty$)
2. e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $(e^z)' = e^z$ d'après le Théorème 2.34
3. $e^{z+w} = e^z e^w$.

Démonstration. La série :

$$\sum_{k,l \geqslant 0} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!}$$

est sommable, on a donc l'égalité suivante :

$$\sum_{k,l \geqslant 0} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{k \geqslant 0} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l \geqslant 0} \frac{z^l}{l!} \right) = e^z \cdot e^w \\ \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}}_{\text{Newton}} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w} \end{array} \right.$$

∎

4. e^z ne s'annule pas.

Démonstration. $e^z e^{-z} = 1$. ∎

5. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

Démonstration. La conjugaison est continue, linéaire et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. ∎

Théorème 3.1 (Exponentiel réel, définition de e) La fonction exp restreinte à $\mathbb{R}$ est une fonction continue strictement croissante qui vérifie :

$$\lim_{-\infty} \exp = 0 \qquad \lim_{+\infty} \exp = +\infty \qquad \exp(0) = 1$$

On note $e := \exp(1)$.

Démonstration. Il est clair que pour tout $t \geqslant 0$, $\exp(t) > 0$, comme $\exp(t)\exp(-t) = 1$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t) > 0$. Mais $\exp' = \exp$, donc exp est strictement croissante.

Il est clair que $\exp(t) \geqslant 1 + t$ pour $t \geqslant 0$, donc $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$, de nouveau la formule $\exp(t)\exp(-t) = 1$ montre que $\lim_{-\infty} \exp = 0$. ∎

Proposition 3.2 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\exp(it)| = 1$.

Démonstration. En effet, $|\exp(it)|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1$. ∎

On définit les fonctions cosinus et sinus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(it)) \qquad \sin(t) = \mathrm{Im}\,(\exp(it)) \qquad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

En dérivant, l'identité d'Euler :

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

On obtient :

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos$$

En regardant le DSE de exp, on obtient la formule, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(t) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Définition 3.3 (Définition de π) La fonction cos possède un plus petit zéro strictement positif t_0, on pose :

$$\pi := 2t_0.$$

Démonstration. On a pour tout $t > 0$,

$$\cos(t) < 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}.$$

En particulier, $\cos(2) < -1/3$. Comme cos est continue et $\cos(0) = 1$, il existe bien un plus petit zéro de cosinus sur l'axe réel. ■

Théorème 3.4

1. $e^{i\pi//2} = i$.
2. $e^z = 1$ si et seulement si $z/2\pi i \in \mathbb{Z}$.
3. La fonction exponentielle est périodique, de période $2\pi i$.
4. L'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
5. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $2\pi i\mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. On a $\sin(t_0) = \pm 1$ puisque $|e^{it_0}| = 1$ mais $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ sur $]0, t_0[$ et $\sin(0) = 0$ donc $\sin(t_0) = 1$ et $e^{it_0} = i$.
2. On en déduit que $e^{i\pi} = i^2 = -1$, puis que $e^{2i\pi} = 1$. Soit $z = x + iy$ tel que $e^z = 1$. Puisque $e^x = |e^z| = 1$, on a $x = 0$. Pour montrer que $y/2\pi$ est un entier, on écrit $y = 2\pi N + y_0$ avec $N \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant y_0 < 2\pi$, on obtient $e^{iy_0} = 1$; pour conclure il suffit donc de montrer que $e^{iy} \neq 1$ pour $0 < y < 2\pi$.

   Soit $0 < y < 2\pi$, on écrit :
   $$e^{iy/4} =: u + iv.$$
   Puisque $0 < y/4 < \pi/2$, on a $u, v > 0$ mais on a aussi :
   $$e^{iy} = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2).$$
   Donc si $e^{iy} = 1$ alors $u^2 - v^2 = 0$ mais $u^2 + v^2 = |e^{iy/4}| = 1$, ce qui entraîne $u^2 = v^2 = 1/2$, d'où $e^{iy} = -1 \neq 1$, absurde.
3. Clairement, exp est $2\pi i$-périodique puisque $e^{2\pi i} = 1$ et la formule d'addition d'exponentiel. Et, toute période T doit vérifier $e^T = 1$ d'où le résultat.
4. Le seul point manquant est la surjectivité. Soit $w = u + iv$ de module 1, supposons $u, v \geqslant 0$, comme $0 \leqslant u \leqslant 1$, il existe $0 \leqslant t \leqslant t_0$ tel que $\cos(t) = u$. Vérifions que $\sin(t) = v$. En effet, $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - u^2 = v^2$ donc $\sin(t) = \pm v$. Mais, sin est croissante sur $[0, t_0]$ donc $\sin(t) \geqslant 0$, donc $\sin(t) = v$.

   Si $u < 0, v \geqslant 0$ alors $-iw$ vérifie les conditions précédentes, autrement dit $-iw = e^{it}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$, donc $w = e^{i(t+\pi/2)}$. On raisonne de façon similaire pour les autres cas.
5. Le seul point manquant est la surjectivité. Soit $w \in \mathbb{C}^*$, on pose $\alpha = \frac{w}{|w|}$. Ainsi $|\alpha| = 1$ et il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^{iy} = \alpha$. De plus, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = |w|$. On pose $z = x + iy$, on obtient $e^z = w$.

■

II Les fonction trigonométriques

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Un calcul direct donne les DSE suivants :

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Proposition 3.5

1. cos et sin sont définies sur $\mathbb{C}$,
2. sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
3. $\cos(w+z) = \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z)$
4. $\sin(w+z) = \sin(w)\cos(z) + \cos(w)\sin(z)$.
5. cos et sin satisfont toutes les identités habituelles, par exemple :
$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$$
6. Les fonctions $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont surjectives.
7. En particulier, les modules de cos et de sin ne sont pas bornées.
8. Les deux fonctions sont périodiques de période $T = 2\pi$.

Démonstration. Les formules se vérifient alors en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

Vérifions que $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Soit $w \in \mathbb{C}$, on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\cos(z) = w$. Il faut résoudre

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w.$$

Avec la notation $e^{iz} = \zeta$, l'equation à resoudre est $\zeta^2 - 2w\zeta - 1 = 0$. Elle a deux solutions ζ_1 et ζ_2 (peut être identiques) non-nuls. Comme la fonction exponentielle prend toutes les valeurs dans $\mathbb{C}^*$, il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $e^{iz_1} = \zeta_1$. Alors $\cos(z_1) = w$. ■

Définition 3.6 Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe, est dite *entière* lorsque $\mathcal{U} = \mathbb{C}$.

Ex : Les polynômes, $\exp, \cos, \sin$...

■ **Remarque 3.7** Le petit théorème de Picard dit que toute fonction entiere et non-constante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un. ■

III Les fonctions logarithmes

Notons ln le logarithme népérien $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

1 C'est quoi ?

Définition 3.8 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une *détermination du logarithme sur* $\mathcal{U}$ est une fonction holomorphe ℓ sur $\mathcal{U}$ telle que

$$\exp \circ \ell = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}.$$

2 Propriétés

Quelques propriétés des fonctions logarithmes :

1. Le fait que la fonction exponentielle ne s'annule pas implique que si ℓ est une détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$ alors $0 \notin \mathcal{U}$.
2. Supposons que l'on cherche $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$ pour un $z \neq 0$ fixé.

   Soit $w = u + iv$, alors $e^{u+iv} = |z|e^{i\theta}$, où θ est un argument de z. D'où,

$$\begin{cases} e^u & = & |z| & \\ v & \equiv & \theta & [2\pi] \end{cases}$$

   Soit,

$$\begin{cases} u & = & \ln(|z|) & \\ v & \equiv & \theta & [2\pi] \end{cases}$$

   Conclusion : toute fonction logarithme ℓ doit satisfaire :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\ell(z)) & = & \ln|z| & \\ \mathrm{Im}\,(\ell(z)) & \equiv & \arg(z) & [2\pi] \end{cases}$$

Théorème 3.9 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Si $\exp \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$, alors f est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \mathcal{U}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{U}$. Il suffit de montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z et que $f'(z) = \frac{1}{z}$. Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $z + h \in \mathcal{U}$. Notons $w(h) = f(z+h) - f(z)$, cette fonction est continue en 0 et $w(0) = 0$.

La fonction exponentielle est $\mathbb{C}$-dérivable en 0, donc il existe une fonction ϵ continue en 0 avec $\epsilon(0) = 0$ telle que

$$e^{w(h)} - e^0 = (1 + \epsilon(h))w(h).$$

$$
\begin{aligned}
f(z+h)-f(z) =: w(h) \\
&= \frac{e^{w(h)}-1}{1+\epsilon(h)} \\
&= \frac{\frac{e^{f(z+h)}}{e^{f(z)}}-1}{1+\epsilon(h)} \\
&= \frac{\frac{z+h}{z}-1}{1+\epsilon(h)} \\
&= \frac{h}{z(1+\epsilon(h))}
\end{aligned}
$$

d'où

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{z(1+\epsilon(h))} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{z}.$$

■

▪ **Remarque 3.10** Donc si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est continue et vérifie $\exp \circ f = Id_{\mathcal{U}}$, on peut conclure que f est une fonction logarithme sur $\mathcal{U}$. ▪

Définition 3.11 Une $\mathbb{C}$-primitive d'une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que $F' = f$.

Proposition 3.12 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert **connexe**.

1. Si $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme alors toute détermination ℓ_2 du logarithme sur $\mathcal{U}$ vérifie $\ell_2 = \ell + 2\pi n i$, pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$.
2. Si la fonction $z \mapsto 1/z$ admet une $\mathbb{C}$-primitive F sur $\mathcal{U}$ alors il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $F + C$ est une détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$.

On va avoir besoin du résultat suivant qui sera démontré plus tard :

Théorème 3.13 Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ **connexe**. Si $f' = 0$ alors f est constante.

Démonstration. Plus tard ... ■

Démonstration.
1. La fonction $\ell - \ell_2$ est holomorphe et de dérivée nulle donc constante sur $\mathcal{U}$. Mais, pour tout $z \in \mathcal{U}$, $\ell(z) - \ell_2(z) \in 2\pi i \mathbb{Z}$.
2. On a :

$$\left(\frac{\exp(F(z))}{z}\right)' = \frac{z \times F'(z)\exp(F(z)) - 1 \times \exp(F(z))}{z^2} = 0$$

Soit C tel que :

$$\exp(F(z)) = e^{-C} z, \qquad \forall z \in \mathcal{U}$$

■

■ **Remarque 3.14** On verra que l'existence de primitive dépend de la topologie de $\mathcal{U}$. ■

3 Exemples

1. Sur $B(1,1)$. La fonction holomorphe $\ell_{\mathrm{DSE}} : B(1,1) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\ell_{\mathrm{DSE}}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

   est une détermination du logarithme sur la boule unité centrée en 1, puisque $\ell'_{\mathrm{DSE}}(z) = 1/z$ et $f(1) = 0$.
2. Sur $\mathbb{DPE} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. La fonction

$$\ell_{\arctan} : \begin{array}{ccc} \mathbb{DPE} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x+iy & \longmapsto & \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan\frac{y}{x} \end{array}$$

   est une détermination du logarithme. Voir TD.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{C}_{\not\alpha} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ e^{i\alpha}$ et

$$\arg_{\not\alpha} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{\not\alpha} & \longrightarrow &]\alpha, \alpha+2\pi[\\ z & \longmapsto & \text{l'unique argument de } z \in]\alpha, \alpha+2\pi[\end{array}$$

   La fonction $\ell_{\not\alpha}$ définie par :

$$\ell_{\not\alpha} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{\not\alpha} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \ln(|z|) + i\arg_{\not\alpha}(z) \end{array}$$

   est une détermination du logarithme puisqu'elle est continue et vérifie $\exp(\ell_{\not\alpha}(z)) = z$ par construction.
4. La fonction $\ell_{\not\pi}$ s'appelle *la détermination / branche principale du logarithme*, certains la notent Log.
5. Il n'y a pas de fonction logarithme définie sur $\mathbb{C}^*$. (On verra plus tard pourquoi)

6. La branche principale du logarithme coïncide avec les déterminations ℓ_{DSE} et $\ell_{\arctan}$, puisque les ensembles de départ de ℓ_{DSE} et $\ell_{\arctan}$ sont inclus dans $\mathbb{C}_{\not\pi}$ et toutes ses fonctions sont égales à 0 en 1.

IV Les fonctions puissances

■ **Rappel 3.15** **Sans utiliser**, la fonction exponentielle, on peut définir pour :

1. $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, $z^n = \underbrace{z \times \cdots \times z}_{n \text{ fois}}$.
2. $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}}$ l'unique antécédent de x par $t \mapsto t^n$.

4. On peut combiner, pour obtenir pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, une définition de x^α.
5. Avec le log réel, on peut définir pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, comme :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} = \lim_{\alpha_n \to \alpha, \alpha_n \in \mathbb{Q}} x^{\alpha_n}$$

■

Soit $\alpha \in \mathbb{C}, \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert et $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction logarithme. On définit *une fonction puissance*

$$\begin{array}{rccl} p_\alpha : & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \exp(\alpha \ell(z)) \end{array}$$

Il est clair que :

1. p_α est holomorphe sur $\mathcal{U}$.
2. $p'_\alpha(z) = \alpha p_{\alpha-1}(z)$, pour tout $z \in \mathcal{U}$.
3. $p_\alpha(z) p_\beta(z) = p_{\alpha+\beta}(z)$, pour tout $z \in \mathcal{U}$.
4. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ alors pour tout $z \in \mathcal{U}$, on a $p_n(z) = z^n$.
5. Cette définition contient toutes les définitions précédentes (Si $\mathcal{U}$ contient ce qu'il faut).
6. Si ℓ_2 est une autre détermination du logarithme alors il existe un $N \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\exp(\alpha \ell_2(z)) = p_\alpha(z) e^{2\pi \mathrm{i} N \alpha}$$

   A $\mathcal{U}$ fixé, la fonction p_α dépend de ℓ sauf si $\alpha \in \mathbb{Z}$.
7. Par exemple, si $\alpha = 1/p$ avec $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ alors si p_α^1 et p_α^2 sont deux fonctions puissance α alors il existe ω une racine p-ième de l'unité tel que :

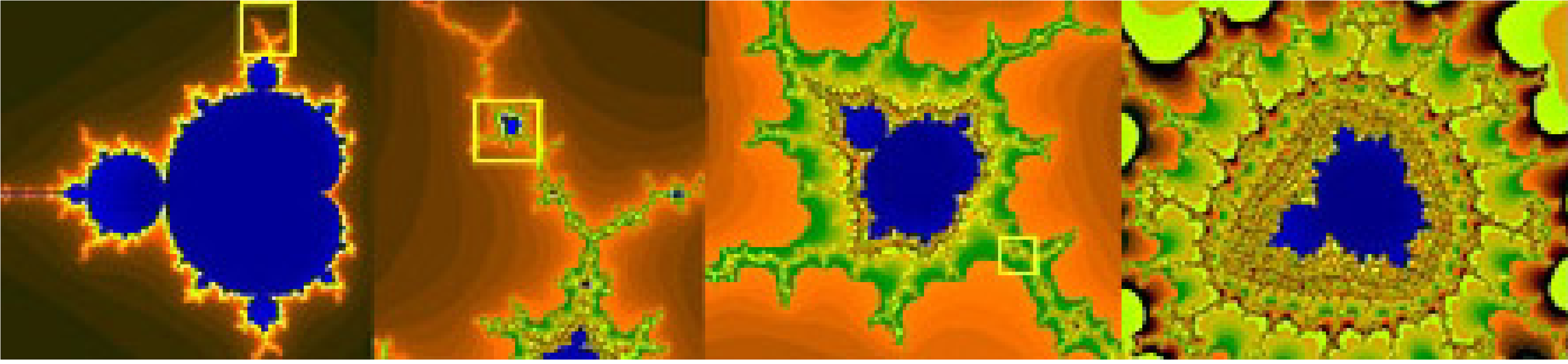
$$\forall z \in \mathcal{U}, \qquad p_\alpha^2(z) = \omega p_\alpha^1(z)$$

On peut donc écrire $p_\alpha(z) = z^\alpha$, si on sait ce que l'on fait !

— cette écriture est définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$.

— $\mathcal{U}$ ne peut-être choisi égale à $\mathbb{C}^*$, sauf quand $\alpha \in \mathbb{Z}$... mais dans ce cas, on ne fait pas ça...

— Il faut aussi choisir un logarithme.



4. Applications biholomorphes

I C'est quoi ?

Définition 4.1 Soit X, Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est *un homéomorphisme* lorsque :

1. f est continue,
2. f est bijective,
3. l'application $f^{-1} : Y \to X$ est continue.

Définition 4.2 Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une application $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est *un biholomorphisme* si :

1. f est holomorphe,
2. f est bijective,
3. l'application $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est holomorphe.

▪ **Remarque 4.3 — Pour les biholomorphismes.** Nous allons voir plus tard que les deux premières conditions impliquent la troisième. ▪

▪ **Remarque 4.4** f est biholomorphe (resp. un homéomorphisme) si et seulement si f^{-1} est biholomorphe (resp. un homéomorphisme) . Si f est un biholomorphisme alors f est un homéomorphisme. ▪

Notation 4.1. *On note :*

1. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$*, le demi-plan supérieur, appelé le* demi-plan de Poincaré.
2. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$*, le disque unité, appelé le* disque de Poincaré.
3. $\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) > 0\}$*, le quart de plan.*

4. *$B = \{z \in \mathbb{C},\ -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$, une bande.*

■ **Exemple 4.5** L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & z & \longmapsto & z^2 \end{array}$ est bien définie, holomorphe, bijective et d'inverse aussi holomorphe puisque :

$$\varphi^{-1}(z) = e^{1/2 \mathrm{Log}(z)}.$$

$\varphi : \mathcal{Q} \to \mathbb{H}$ est donc un biholomorphisme. ■

II Homographie ou transformation de Moëbius

On considère le groupe

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

1 Définition

À toute matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

on associe une application :

$$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Si $c \neq 0$, alors h_A est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. Si $c = 0$ (donc $a, d \neq 0$), l'application h_A est définie sur $\mathbb{C}$.

Notation 4.2. *On note $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Si $a \in \mathbb{C}^*$, on note $\frac{a}{\infty} = 0$ et $\frac{a}{0} = \infty$.*

Avec cette convention, l'application h_A s'étend à $\hat{\mathbb{C}}$, via :

$$\begin{array}{rccc} h_A : & \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si} \quad z \neq -d/c, \infty \\ \infty & \text{si} \quad z = -d/c \\ a/c & \text{si} \quad z = \infty \end{cases} \end{array}$$

Proposition 4.6 La fonction h_A ainsi étendue est bien définie, bijective (et continue)[a].

a. Essayer de le démontrer sur $\mathbb{R}$!

Proposition 4.7 La fonction $h_A : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ est holomorphe et $h'_A(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$.

Démonstration.

$$h'_A(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz+d)^2}.$$

■

Définition 4.8 Une *transformation de Moëbius*, on dit aussi une *homographie*, est une application de la forme h_A

En général, h_A est restreinte à un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

2 Point de vue action de groupe

Proposition 4.9 L'application :

$$\begin{array}{rcl} h : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}}) \\ A & \longmapsto & h_A \end{array}$$

est un morphisme de groupes, autrement dit :

$$h_{AB}(z) = h_A \circ h_B(z) = h_A(h_B(z)),$$

de noyau

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

On note $\mathrm{Möb}(\hat{\mathbb{C}})$, l'image de ce morphisme, le groupe des transformations de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Exo TD. ■

▪ **Remarque 4.10** Cela signifie que pour tout $A \in Z$, $h_A = \mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ et aussi que pour tout $\lambda \neq 0$ et tout $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $h_{\lambda A} = h_A$. Ceci permet de renormaliser A, c'est à dire d'avoir une forme plus sympathique, par exemple de forcer $d = 1$, ou de forcer $\det(A) = 1$, etc... ▪

▪ **Remarque 4.11** Le groupe Z est le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire :

$$Z = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) | Ag = gA, \quad \forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\}$$

▪

Corollaire 4.12

— L'inverse de h_A est $h_{A^{-1}}$.

— $h_A : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ est un biholomorphisme, d'inverse $h_{A^{-1}}$.

3 Exemple I : Les similitudes

On s'intéresse au cas particulier, $c = 0$, on peut donc supposer que $d = 1$. On a alors :

$$h_A(z) = az + b$$

Une telle application s'appelle une similitude (directe), les similitudes conservent les angles orientés et multiplient les longueurs par une constante (ici $|a|$).

4 Exemple II : : L'application de Cayley.

Proposition 4.13 Il existe une transformation de Möbius h tel que $h(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. En particulier, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$ sont biholomorphes.

Démonstration. Si on trouve un h tel que :

$$h(\mathrm{i}) = 0 \qquad h(\infty) = 1 \qquad h(0) = -1$$

Petit dessin de $\mathbb{H}$ avec son bord qui s'envoie sur $\mathbb{D}$ avec son bord ...

se sera un bon début ! Un tel h est unique.

$$h(z) = \frac{z-i}{cz+d} \quad \rightsquigarrow \quad = \frac{z-i}{z+d} \quad \rightsquigarrow \quad = \frac{z-i}{z+i}$$

On tente notre chance, en posant :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les transformations de Möbius associées sont :

$$h_C(z) = \frac{z-i}{z+i} \qquad h_C^{-1}(z) = \frac{iz+i}{-z+1} = i\frac{1+z}{1-z}.$$

Un petit calcul que l'on ferra en TD donne :

$$1 - |h_C(z)|^2 = \frac{4\mathrm{Im}\,(z)}{|z+i|^2} \qquad \mathrm{Im}\,(h_C^{-1}(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

Par conséquent,

$$h_C(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D} \qquad h_C^{-1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{D} \subset h_C(\mathbb{H})$$

Donc

$$h_C(\mathbb{H}) = \mathbb{D} \qquad \text{et} \qquad h_C^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$$

Les applications h_C et h_C^{-1} sont holomorphes donc $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$ sont biholomorphes et h_C est un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$. ∎

III Automorphismes

1 Définition

Définition 4.14 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert dans $\mathbb{C}$. *Un automorphisme de* $\mathcal{U}$ est un biholomorphisme $f:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$. On note $\mathrm{Aut}(\mathcal{U})$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{U}$.

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, on définit :

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{U}) = \{g \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\hat{\mathbb{C}}) \,|\, g(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\}$$

Il est clair que $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$.

■ **Remarque 4.15** On verra (en cours ou en TD, mais vers la fin !) que pour $\mathcal{U} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$, on a en fait :

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{U}) = \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{U}).$$

Dans tous les cas, la seconde inclusion est non-triviale. ■

2 Les automorphismes de $\mathbb{C}$

Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{Sim}(\mathbb{C})$ le groupe des similitudes (directes) de $\mathbb{C}$.

■ **Remarque 4.16** Une transformation de Möbius $h_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ vérifie $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ si et seulement si $h_A(\infty) = h(\infty)$ si et seulement si $c = 0$. Autrement dit :

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}) = \mathrm{Sim}(\mathbb{C})$$

■

■ **Remarque 4.17** Dans une feuille de TD ou dans le cours, on montrera :

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{C}) = \mathrm{Sim}(\mathbb{C})$$

■

3 Les automorphismes de $\mathbb{H}$

Notons :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) = 1\}$$

Proposition 4.18 Pour tout $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, l'application h_A est dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{H}$, on a

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Im}(h_A(z)) &= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \\
&= \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)-(cz+d)(a\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{(z-\overline{z})}{|cz+d|^2} \\
\mathrm{Im}(h_A(z)) &= \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}\, h_A(z) > 0$ d'où $h_A(z) \in \mathbb{H}$. Donc $h_A(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, comme $A^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ donc $h_A^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, donc $h_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. ■

On en déduit un morphisme de groupes

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$$

dont le noyau est $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

Théorème 4.19 Ce morphisme est surjectif.

Démonstration. Démo en TD. ■

On verra plus tard que :

Théorème 4.20

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{Möb}(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

Démonstration. Plus tard. ■

4 Les automorphismes de $\mathbb{D}$

Proposition 4.21 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{D}$, l'application :

$$\begin{aligned} h_{\theta,w} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto e^{i\theta}\frac{z-w}{1-\overline{w}z} \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{D}$.

Démonstration. Si $\theta = \pi$ d'après l'exo 8 de la feuille 1 du TD, le cas général s'en déduit aisément. ■

De plus, $h_{\theta,w}$ la transformation de Moëbius donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & -e^{i\theta}w \\ -\overline{w} & 1 \end{pmatrix}$$

On verra en TD, la proposition suivante :

Proposition 4.22

$$\text{Möb}(\mathbb{D}) = \{ h_{\theta,w} | \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{D} \}.$$

On verra plus tard que :

Théorème 4.23

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Möb}(\mathbb{D})$$

Démonstration. On verra plus tard, ce sera une conséquence du lemme de Schwartz. ∎

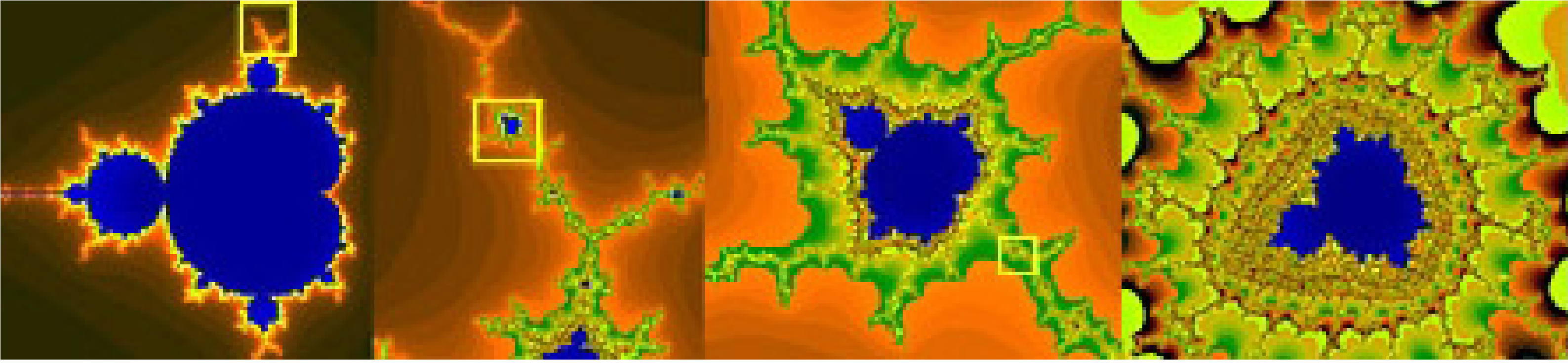
Néanmoins, on a vu que le disque et de demi-plan sont équivalents d'un point de vue holomorphe, on peut dès à présent montrer :

Proposition 4.24 Si $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Möb}(\mathbb{D})$ alors $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{Möb}(\mathbb{H})$.

Démonstration. Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, alors $h_C \circ f \circ h_C^{-1} =: m \in \text{Aut}(\mathbb{D}) = \text{Möb}(\mathbb{D})$. Donc :

$$f = h_C^{-1} \circ m \circ h_C$$

est une transformation de Möbius donc $f \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. ∎



5. La théorie de Cauchy

I Intégration d'une fonction $\mathbb{R} \supset I \to \mathbb{C}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $[a,b] \subset I$. On définit :

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt.$$

Proposition 5.1 Pour $f,g : I \to \mathbb{C}$ fonctions continues, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $a,b,c \in I$, on a :

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;
2. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$;
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$
4. $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$
5. $\displaystyle\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt, \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt.$
6. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$

Démonstration. Le dernier point n'est pas évident malgré les apparences. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$e^{i\alpha}\int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Ainsi :

$$e^{i\alpha}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}f(t)\right)dt$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\int_a^b \mathrm{Re}(e^{i\alpha}f(t))dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b \left|\mathrm{Re}(e^{i\alpha}f(t))\right|dt && \text{(The usual inequality)} \\ &\leqslant \int_a^b \left|e^{i\alpha}f(t)\right|dt \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)|dt\end{aligned}$$

■

Définition 5.2 Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite $\mathcal{C}^1$ *par morceaux*, ou *de classe* $\mathcal{CM}^1$ lorsque :

- f est continue et
- il existe un nombre fini de points $a_1 < \cdots < a_N$ tels que f restreinte au segment $[a_i, a_{i+1}]$ est $\mathcal{C}^1$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$ *par morceaux* (*de classe* $\mathcal{CM}^1$) lorsque sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

▪ **Remarque 5.3** L'item 2 implique que f est continue. ▪

▪ **Remarque 5.4** La définition de fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux, n'est pas universelle. Attention aux collisions potentiels avec d'autres cours. ▪

Les applications $\mathcal{CM}^1$ sont l'intégrale de leur dérivée [1] :

Proposition 5.5 — Une version du second théorème fondamental de l'analyse. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{CM}^1$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall a, b \in I, \qquad \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

II Intégration d'une fonction $\mathbb{C} \supset \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ sur des chemins

1 Un chemin lisse, c'est quoi ?

Définition 5.6 (Chemin $\mathcal{C}^1$) Un *chemin* $\mathcal{C}^1$ *tracé dans* $\mathcal{U}$ est une application γ, de classe $\mathcal{C}^1$, d'un segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ (avec $a \leqslant b$) vers $\mathcal{U}$.

▪ **Rappel 5.7** Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $\gamma = u + iv$ un chemin $\mathcal{C}^1$. Les applications u et v sont $\mathcal{C}^1$ et

1. Faut qu'elle soit continue pour cela.

on a :

$$\gamma'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

■

Définition 5.8 (Intégrale le long d'un chemin $\mathcal{C}^1$) Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\gamma : I \to \mathcal{U}$ un chemin $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt.$$

■ **Remarque 5.9** Il faut bien remarquer qu'en général :

$$\mathrm{Re}\left(\int_\gamma f(z)dz\right) \neq \int_\gamma \mathrm{Re}(f(z))dz.$$

■

2 Un calcul fondamental

Proposition 5.10 Soit $\partial\mathbb{D}(z,R)$ le cercle de rayon R centré en $z \in \mathbb{C}$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\partial\mathbb{D}(z,R)} (\zeta - z)^n d\zeta = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Démonstration. On paramétrise $\partial\mathbb{D}(z,R)$ par $\gamma(t) = z + Re^{\mathrm{i}t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Alors

$$\int_{\partial\mathbb{D}(z,R)} (\zeta - z)^n dz = \int_0^{2\pi} (Re^{\mathrm{i}t})^n \cdot \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}dt = \mathrm{i}R^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)t}dt.$$

Si $n \neq -1$, $t \mapsto \frac{e^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}$ est une primitive de $e^{\mathrm{i}(n+1)t}$ et donc

$$\mathrm{i}R^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)t}dt = R^{n+1}\left[\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)t}}{(n+1)}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Dans le cas $n = -1$, on a

$$iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = iR^0\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

■

3 Un chemin, c'est quoi ?

Définition 5.11 (Chemin) Un *chemin tracé dans* $\mathcal{U}$ est une application γ, de classe $\mathcal{CM}^1$, d'un segment $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ (avec $a \leqslant b$) vers $\mathcal{U}$.

Notation 5.1. *Si* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est un chemin, on note :*

— $\gamma^{\mathrm{deb}} = \gamma(a)$, *l'origine, le début, le départ de* γ.

— $\gamma^{\text{but}} = \gamma(b)$, *la fin, la destination, le but de* γ.

— *Un chemin est dit* fermé *si* $\gamma^{\text{deb}} = \gamma^{\text{but}}$. *On dit aussi que c'est un* lacet.

— γ^*, $\text{im}(\gamma)$, $|\gamma|$ *(voir simplement* γ*) désigne l'image* $\gamma([a,b])$ *de* γ*, c'est à dire le sous-ensemble de* $\mathbb{C}$ *parcouru par* γ.

Définition 5.12 (Concaténation des chemins) Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont deux chemins tels que $\gamma_1^{\text{fin}} = \gamma_2^{\text{but}}$, la *concaténation* $\gamma_2 \odot \gamma_1$ de γ_1 et γ_2 est le chemin :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_2 \odot \gamma_1 : & [a, b+(d-c)] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lllllll} \gamma_1(t) & \text{si} & a & \leqslant & t & \leqslant & b \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{si} & b & \leqslant & t & \leqslant & b+d-c \end{array} \right. \end{array}.$$

■ **Remarque 5.13** Un chemin est la concaténation d'un nombre fini de chemins $\mathcal{C}^1$. ■

Définition 5.14 (Intégrale le long d'un chemin) Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application continue et γ un chemin tracé dans $\mathcal{U}$. On écrit $\gamma = \gamma_k \odot \gamma_{k-1} \odot \cdots \odot \gamma_1$, où les γ_i sont des chemins $\mathcal{C}^1$, on pose :

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Notation 5.2. *Si* γ *est un chemin alors* $\overleftarrow{\gamma}$ *(ou* $-\gamma$*) est le* chemin opposé *:*

$$\begin{array}{rccl} \overleftarrow{\gamma} : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \gamma(b+a-t) \end{array}$$

C'est à dire γ *parcouru en sens inverse.*

4 Indépendance de l'intégrale vis-à-vis de la paramétrisation

Définition 5.15 — Relation d'équivalence sur les chemins. Deux chemins $\gamma_1 : I \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : J \to \mathbb{C}$ sont dits **équivalents** lorsqu'il existe une bijection $\alpha : J \to I$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec α' strictement positive, telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$.

Cette définition donne lieu à une relation d'équivalence.

Théorème 5.16 — Indépendance de l'intégrale vis-à-vis de la paramétrisation. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ continue et γ_1, γ_2 deux chemins tracés dans $\mathcal{U}$.

Si γ_1 et γ_2 sont équivalents, alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Démonstration. On a $\gamma_1 : [a,b] \to \mathcal{U}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathcal{U}$ et $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ bijection $\mathcal{C}^1$ avec $\alpha' > 0$ et telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \\
&= \int_c^d f(\gamma_1 \circ \alpha(t)))(\gamma_1 \circ \alpha)'(t)dt \\
&= \int_c^d f(\gamma_1(\alpha(t)))\gamma_1'(\alpha(t))\underbrace{\alpha'(t)dt}_{=ds} \qquad \text{on pose } s = \alpha(t) \\
&= \int_{\alpha(c)}^{\alpha(d)} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds \\
&= \int_a^b f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds \\
&= \int_{\gamma_1} f(z)dz.
\end{aligned}$$

■

5 Intégrale le long d'un multi-chemin

Définition 5.17 Un *multi-chemin* Γ *tracé dans* $\mathcal{U}$ est une union finie de chemins $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tracé dans $\mathcal{U}$. On le note $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$.

■ **Remarque 5.18** On écrira plutôt $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3$ que $\gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2} + \gamma_3$. ■

Définition 5.19 (Intégrale le long d'un multi-chemin) Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\Gamma = \sum_i \gamma_i$ un multi-chemin tracé dans $\mathcal{U}$, où les γ_i sont des chemins. On pose :

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

6 Les règles de calcul de base

Proposition 5.20 Soit Γ une chaine tracé dans $\mathcal{U}$, f, g deux fonctions continues sur $\mathcal{U}$. Alors :

1. $\displaystyle\int_\Gamma (f+g)(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_\Gamma g(z)dz.$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_\Gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\Gamma f(z)dz.$
3. $\displaystyle\int_{\Gamma+\Gamma'} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_{\Gamma'} f(z)dz.$
4. $\displaystyle\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$

Démonstration. Les points (1)-(3) sont des applications directes des définitions.

Montrons (4). On peut supposer que γ est un chemin $\mathcal{C}^1$ et $[a,b] = [0,1]$. On note $\phi : [0,1] \to [0,1]$ application définie par $\phi(t) = 1 - t$, ainsi $\overleftarrow{\gamma} = \gamma \circ \phi$.

$$\begin{aligned}
\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(\phi(t)))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)dt \\
&= \int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\times -1dt \qquad s := 1-t \\
&= \int_1^0 f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\
&= -\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\
&= -\int_\gamma f(z)dz.
\end{aligned}$$

■

7 Longueur d'un chemin

Définition 5.21 Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. Soit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Alors la quantité

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

ne dépend pas de la paramétrisation, on l'appelle *la longueur de* γ.

Démonstration. Si $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ est un chemin équivalent à γ via $\gamma_1 = \gamma \circ \alpha$ où $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ avec $\alpha' > 0$, alors :

$$\gamma_1(t) =: u(t) + iv(t) = x(\alpha(t)) + iy(\alpha(t))$$

d'où

$$u'(t) = x(\alpha(t))\alpha'(t) \qquad v'(t) = y(\alpha(t))\alpha'(t)$$

Ainsi

$$|\gamma_1'(t)| = |\gamma'(\alpha(t))|\alpha'(t)$$

D'où

$$L(\gamma_1) = \int_c^d |\gamma_1'(t)|dt = \int_c^d |\gamma'(\alpha(t))|\alpha'(t)dt = \int_a^b |\gamma'(s)|ds = L(\gamma).$$

■

8 L'inégalité Max-Longueur

Théorème 5.22 — Majoration standard. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur γ. Alors

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \|f\|_\gamma L(\gamma).$$

On rappelle que, si $X \subset \mathbb{C}$ alors :

$$\|f\|_X = \sup_{z\in X}|f(z)|.$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'inégalité pour un chemin de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|dt \\ &\leqslant \|f\|_\gamma \int_a^b |\gamma'(t)|dt \\ &= \|f\|_\gamma L(\gamma)\end{aligned}$$

■

III Connexe, Connexe par arcs, connexe par segments, étoilé, convexe

Définition 5.23 Soit $z,w \in \mathbb{C}$, le segment $[z,w]$ est l'ensemble :

$$[z,w] = \{tz + (1-t)w \,|\, t \in [0,1]\}$$

Il est paramétré par :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tz+(1-t)w \end{array} \quad \text{qui vérifie} \quad \gamma'(t) = z-w.$$

Définition 5.24 Une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ est

— *connexe* si pour toute paire d'ouverts O_1, O_2 de $\mathcal{U}$ tels que $\mathcal{U} = O_1 \cup O_2$, on a O_1 ou $O_2 = \varnothing$.

— *connexe par arcs* si pour toute paire de points $x, y \in \mathcal{U}$, il existe un "chemin" continue tracé dans $\mathcal{U}$ de source x et de but y.

— *connexe par segments* si pour toute paire de point $x, y \in \mathcal{U}$, il existe un chemin γ tracé dans $\mathcal{U}$ de début x et de fin y ET γ est une concaténation de segments.

— *étoilé* s'il existe un $c \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $z \in \mathcal{U}$, le segment $[c,z] \subset \mathcal{U}$.

— *convexe* si pour tout $z, w \in \mathcal{U}$, le segment $[z,w] \subset \mathcal{U}$.

On a les implications suivantes :

connexe $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe par lignes polygonales $\Rightarrow$ Étoilé $\Rightarrow$ convexe

A noter que pour **les ouverts** :

connexe	$\Leftrightarrow$	connexe par arcs	$\Leftrightarrow$	connexe par lignes polygonales

Exemple 5.25

— $\mathbb{C}$, les demi-plans, les disques sont convexes.

— $\mathbb{C} \setminus D$ où D est une demi-droite est étoilé mais n'est pas convexe.

— Un disque épointé est connexe mais n'est pas étoilé, une couronne idem, $\mathbb{C}$ privé d'un segment, etc ... Ces exemples ont un trou ! Ils ne sont pas simplement connexe. Des exemples simplement connexe, uUn ouvert avec deux cornes (faire un dessin) est connexe mais n'est pas étoilé. $\mathbb{C}$ privé d'une spirale est connexe mais n'est pas étoilé.

■

Proposition 5.26 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si $f' = 0$ alors f est constante.

Démonstration. Soit $z, w \in \mathcal{U}$, comme $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe, $\mathcal{U}$ est connexe par lignes polygonales. Il existe donc un chemin γ tracé dans $\mathcal{U}$ de source z et de but w.

$$f(w) - f(z) = f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt = \int_0^1 (f' \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = 0.$$

L'application $f \circ \gamma$ est :

— continue puisque f est holomorphe et γ est continue,

— dérivable sur le segment $[a_i, a_{a_{i+1}}]$, puisque γ est $\mathcal{C}^1$ et f est $\mathbb{C}$-dérivable

— continument dérivable puisque cette dérivée est nulle

— elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{a_{i+1}}]$.

On peut bien appliquer le second théorème fondamental de l'analyse. ■

IV Le théorème de Cauchy pour les dérivées

1 Chemin vs lacet

Proposition 5.27 Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application continue. LASSE :

1. Pour tous les chemins α et β tracés dans $\mathcal{U}$ avec la même source et le même but, on a :
$$\int_\alpha f(z) dz = \int_\beta f(z) dz$$
(L'intégrale de f le long d'un chemin ne dépend que des extrémités du chemin.)
2. Pour tout lacet γ tracé dans $\mathcal{U}$,
$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

(L'intégrale de f le long de tout lacet est nulle.)

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ 2. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ un lacet, on note α la restriction de γ à $[0, 1/2]$ et δ de γ à $[1/2, 1]$. Ainsi, α et $\overleftarrow{\delta}$ sont des chemins tracés dans $\mathcal{U}$ de même source et de même but, et :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz + \int_\delta f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz - \int_{\overleftarrow{\delta}} f(z)dz = 0$$

2. $\Rightarrow$ 1. Soit α et β deux chemins tracés dans $\mathcal{U}$ de même source et de même but alors $\overleftarrow{\beta} \odot \alpha$ est un lacet :

$$\int_\alpha f(z)dz - \int_\beta f(z)dz = \int_{\overleftarrow{\beta}\odot\alpha} f(z)dz = 0.$$

■

2 Existence de $\mathbb{C}$-primitive

Théorème 5.28 — Lien $\mathbb{C}$-primitive et Intégrale sur les chemins.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application continue et $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application. LASSE :

1. F est une $\mathbb{C}$-primitive de f.
2. Pour tout $z, w \in \mathcal{U}$ et tout chemin γ tracé dans $\mathcal{U}$, de source z et de but w,
$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = F(w) - F(z).$$
3. Pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe $\delta > 0$, tel que $\mathbb{D}(z,\delta) \subset \mathcal{U}$ et pour tout $h \in \mathbb{D}(0,\delta)$,
$$\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta = F(z+h) - F(z).$$
où $[z, z+h]$ est le segment de z à $z+h$.

Démonstration. $(1.) \Rightarrow (2.)$: Soit $z, w \in \mathcal{U}$ et $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ un chemin tracé dans $\mathcal{U}$ de source z et de but w. En dehors d'un nombre fini de temps,

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

Le second théorème fondamental de l'analyse appliqué à $F \circ \gamma$ (qui bien $\mathcal{CM}^1$) donne :

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F\circ\gamma(1) - F\circ\gamma(0) = F(w) - F(z).$$

$(2.) \Rightarrow (3.)$: C'est clair, on demande moins.
$(3.) \Rightarrow (1.)$: Soit $z \in \mathcal{U}$. Montrons que F est $\mathbb{C}$-dérivable en z et $F'(z) = f(z)$.

La preuve doit vous faire penser à la preuve classique d'analyse réelle, qui dit que la dérivée d'une intégrale est la fonction de départ (premier théorème fondamental de *l'analyse).*

Pour tout $h \in \mathbb{D}(0,\delta)$, on a :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta$$

On note que $\int_{[z,z+h]} f(z)d\zeta = hf(z)$ et donc

$$F(z+h) - F(z) - f(z)h = \int_{[z,z+h]} f(\zeta) - f(z)d\zeta$$

Mais, l'inégalité max-longueur donne :

$$\left| \int_{[z,z+h]} f(\zeta) - f(z)d\zeta \right| \leqslant |h| \underbrace{\sup_{\zeta \in [z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)|}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0}$$

On a donc montré que F est $\mathbb{C}$-dérivable en z et $F'(z) = f(z)$. ■

Théorème 5.29 — Le théorème de Cauchy pour les dérivées.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application continue. LASSE :

1. f admet une $\mathbb{C}$-primitive.
2. Pour tout lacet γ tracé dans $\mathcal{U}$,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

De plus, si $\mathcal{U}$ est connexe alors pour tout $c \in \mathcal{U}$, la fonction

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$$

où γ_z est un chemin parametré de c à z dans $\mathcal{U}$, est une primitive de f.

■ **Exemple 5.30** Deux exemples à retenir :

— Pour $n \neq -1$, la fonction $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $z \mapsto z^n$.

— La fonction $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{D}(w,R)$ car $\int_{\partial\mathbb{D}(w,R)} \frac{1}{z-w} = 2\pi i$.

— Donc pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

■

Démonstration. Quitte à raisonner, par composante connexe, on peut supposer que $\mathcal{U}$ est connexe pour toute la démonstration.

$(1.) \Rightarrow (2.)$: Si f admet une $\mathbb{C}$-primitive F alors pour toute paire de chemins α, β tracés dans $\mathcal{U}$ de même source z et même but w, on a :

$$\int_\alpha f(z)dz = F(w) - F(z) = \int_\beta f(z)dz.$$

Ainsi, pour tout lacet γ tracé dans $\mathcal{U}$,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

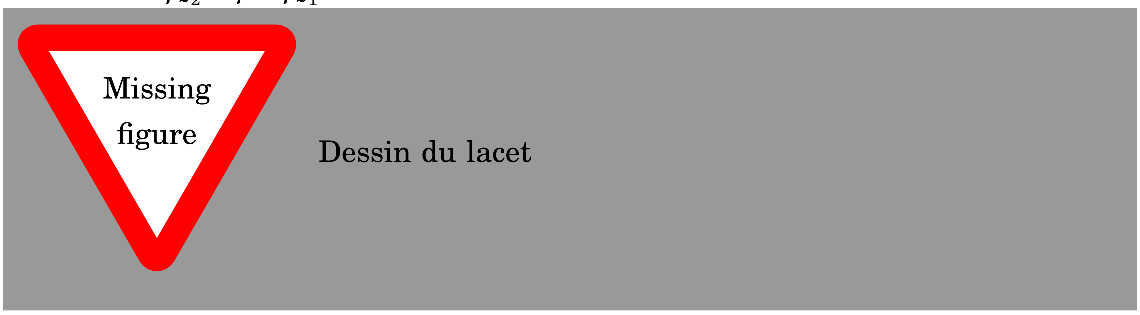
(2.) $\Rightarrow$ (1.) : Soit $c \in \mathcal{U}$ fixé. Notons que pour tout $z \in \mathcal{U}$ on peut trouver un chemin de c à z. On choisit un [2] tel chemin γ_z pour tout $z \in \mathcal{U}$ et on pose

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta \qquad \text{(Indépendant, par hyp. du choix du chemin).}$$

On veut vérifier que F est $\mathbb{C}$-dérivable et $F' = f$. Pour cela, on vérifie que pour tout chemin γ tracé dans $\mathcal{U}$ de source z_1 et de but z_2, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Le chemin $\overleftarrow{\gamma_{z_2}} \odot \gamma \odot \gamma_{z_1}$ est un lacet donc :



$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\overleftarrow{\gamma_{z_2}} \odot \gamma \odot \gamma_{z_1}} f(z)dz \\
&= \int_{\gamma_{z_1}} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_{z_2}} f(z)dz \\
&= F(z_1) + \int_\gamma f(z)dz - F(z_2).
\end{aligned}$$

■

V Le théorème de Cauchy pour les triangles

Définition 5.31 Soit p,q,r trois points non-alignés dans $\mathbb{C}$. On appelle *triangle plein* T la partie convexe fermée délimitée par le chemin $\partial T = [p,q] \odot [q,r] \odot [r,p]$.

Lemme 5.32 — Lemme de Goursat.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et T un triangle plein inclus

2. On sait que la valeur de l'intégrale $\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta$ ne dépend pas de ce choix.

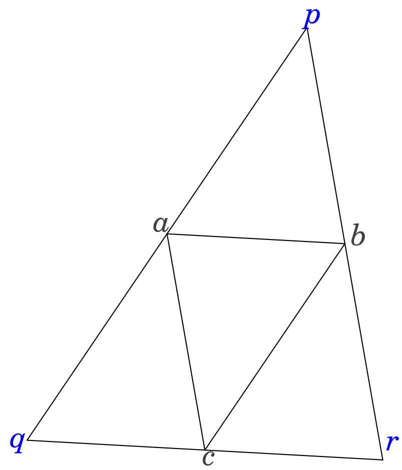


FIGURE 5.1 – Un triangle coupé en 4

dans $\mathcal{U}$. Alors,

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Soient p,q,r les sommets de T. On remarque d'abord que

$$\mathrm{Diam}(T) := \max_{w,z\in T} |w-z| \leqslant L(\partial T).$$

Soient a,b et c sont les milieux des segments $[p,q],[q,r]$ et $[r,p]$.

— Les segments $[a,b]$, $[b,c]$ et $[a,c]$ divisent T en 4 triangles isométriques : Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4.

— $L(\partial Q_k) = \frac{1}{2}L(\partial T)$.

— $\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial Q_k} f(\zeta)d\zeta$

— $\left|\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta\right| \leqslant \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial Q_k} f(\zeta)d\zeta\right| \leqslant 4\max_k \left|\int_{\partial Q_k} f(\zeta)d\zeta\right|$

⋆ Soit $k_1 \in \{1,2,3,4\}$ tel que $\left|\int_{\partial Q_{k_1}} f(\zeta)d\zeta\right| = \max_k \left|\int_{\partial T_k} f(\zeta)d\zeta\right|$.

On rappelle que l'on veut montrer que $\int_{\partial \mathrm{Triangle}} f(\zeta)d\zeta = 0$, pour tout triangle plein.

On note $T_1 := Q_{k_1}$. On divise T_1 par ses milieux (autrement dit de la même manière) en 4 triangles isométriques et on les note $Q_{k_1,l}$, $l \in 1,2,3,4$. Soit k_2 tel que :

$$\left|\int_{\partial Q_{k_1,k_2}} f(\zeta)d\zeta\right| = \max_l \left|\int_{\partial Q_{k_1,l}} f(\zeta)d\zeta\right|.$$

On remarque que

$$\left|\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta\right| \leqslant 4^2 \left|\int_{\partial Q_{k_1,k_2}} f(\zeta)d\zeta\right|$$

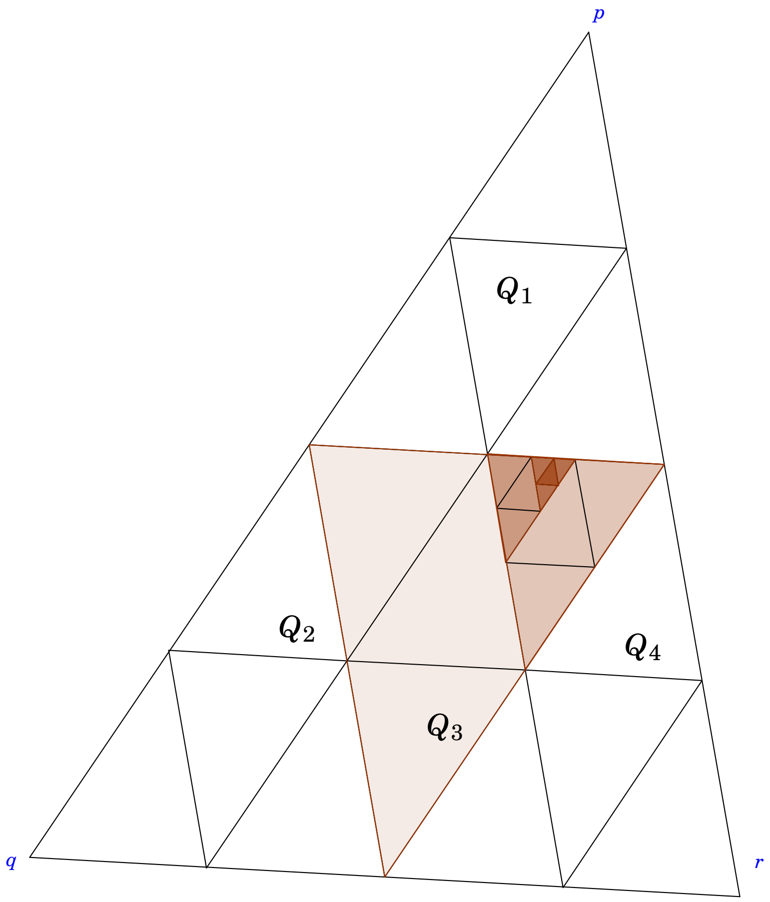


FIGURE 5.2 – The picture of Goursat

On continue, on obtient une suite de triangles :

$$\underbrace{Q_{k_1}}_{=:T_1} \supset \underbrace{Q_{k_1,k_2}}_{=:T_2} \supset \underbrace{Q_{k_1,k_2,k_3}}_{=:T_3} \supset \cdots \supset \underbrace{Q_{k_1,k_2,\dots,k_n}}_{=:T_n} \supset \cdots$$

tel que :
- $\mathrm{Diam}(T_n) = 2^{-n}\mathrm{Diam}(T)$,
- $L(T_n) = 2^{-n}L(T)$
- $\left|\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta\right| \leqslant 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(\zeta)d\zeta\right| \qquad (✡)$

Par le Théorème des compacts emboîtés, il existe $c \in \mathcal{U}$ tel que :

$$\bigcap_n T_n = \{c\}.$$

Soit $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} - f'(c) & z \neq c \\ 0 & z = c \end{cases}$$

Comme f est holomorphe, g est continue sur $\mathcal{U}$ et on a :

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + g(z)(z-c).$$

On calcule l'intégrale de f le long de ∂T_n :

$$\int_{\partial T_n} f(\zeta)d\zeta = \underbrace{\int_{\partial T_n} f(c)d\zeta}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial T_n} f'(c)(\zeta-c)d\zeta}_{=0} + \int_{\partial T_n} g(\zeta)(\zeta-c)d\zeta.$$

puisque les fonctions $\zeta \mapsto f(c)$ et $\zeta \mapsto f'(c)(\zeta-c)$ admettent des $\mathbb{C}$-primitives sur $\mathbb{C}$. La majoration max-longueur donne :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T_n} f(\zeta)d\zeta\right| &\leqslant \|g\|_{\partial T_n}\|\zeta-c\|_{\partial T_n} L(\partial T_n) \\ &\leqslant \|g\|_{\partial T_n}\mathrm{Diam}(T_n)L(\partial T_n) \\ &\leqslant \|g\|_{\partial T_n} L(\partial T_n)^2 \\ &= \|g\|_{\partial T_n}\left(\frac{1}{2^n}L(\partial T)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4^n}\|g\|_{\partial T_n} L^2(\partial T),\end{aligned}$$

On reprend l'inégalité (✡), on obtient :

$$\left|\int_{\partial T} f(\zeta)d\zeta\right| \leqslant 4^n \frac{1}{4^n}\|g\|_{\partial T_n} L^2(\partial T) = \|g\|_{\partial T_n} L^2(\partial T) \leqslant \|g\|_{T_n} L^2(\partial T) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque g est continue en c, $g(c) = 0$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n = \{c\}$. ■

VI Le théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés

Théorème 5.33 — Théorème de Cauchy, pour les ouverts étoilés.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un **ouvert étoilé** et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, pour tout lacet γ tracé dans $\mathcal{U}$, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

▪ **Remarque 5.34** Donc f admet une $\mathbb{C}$-primitive définie sur $\mathcal{U}$, par "le thm de Cauchy pour les dérivées". Et ce sera une étape de la preuve. ▪

Proposition 5.35 — Préparation à Cauchy étoilé.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un **ouvert étoilé** centré en c et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ continue. Supposons que pour tout triangle plein $T \subset \mathcal{U}$, on a :

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Alors f admet une $\mathbb{C}$-primitive.

Démo de Cauchy pour les ouverts étoilés. Par le lemme de Goursat 5.32, f vérifie que pour tout triangle plein $T \subset \mathcal{U}$:

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

Donc par "la "préparation à Cauchy étoilé" 5.35, il existe F une $\mathbb{C}$-primitive de f. Donc par "le thm de Cauchy pour les dérivées" 5.29, pour tout lacet γ tracé dans $\mathcal{U}$, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

■

▪ **Remarque 5.36** *Soit f holomorphe.*

— *Goursat affirme que l'intégrale de f le long de tout triangle est nul.*

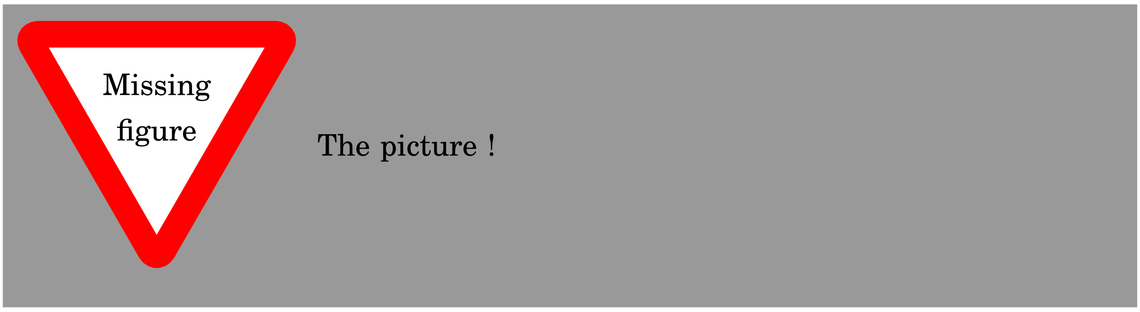
— *La préparation à Cauchy étoilé montre qu'alors f admet une $\mathbb{C}$-primitive, à savoir l'intégrale de f du centre de l'ouvert étoilé au point z.*

— *Le thm de Cauchy pour les dérivées conclut que l'intégrale de f le long de tout lacet est nul.*

▪

Démo de la préparation à Cauchy étoilé.
Montrons que la fonction $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$ est une primitive de f. On utilise $(3) \Rightarrow (1)$ de "Lien $\mathbb{C}$-primitive et Intégrale sur les chemins" 5.28.

Soit $z\in\mathcal{U}$, on se donne un $\delta>0$ tel que $\mathbb{D}(z,\delta)\subset\mathcal{U}$. Comme l'ouvert $\mathcal{U}$ est étoilé, pour tout $h\in\mathbb{D}(0,\delta)$, le triangle plein $[c,z,z+h]$ est inclus dans $\mathcal{U}$, puisque ce triangle plein est l'union des segments $[c,\zeta]$ pour $\zeta\in[z,z+h]$.



On a donc :

$$\int_{[c,z+h]} f(\zeta)d\zeta+\int_{[z+h,z]} f(\zeta)d\zeta+\int_{[z,c]} f(\zeta)d\zeta=0$$

Autrement dit,

$$F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta$$

Ce qui montre que F est $\mathbb{C}$-dérivable et $F'=f$, par le Théorème 5.28. ∎

VII La formule de Cauchy pour les disques

Théorème 5.37 — Formule de Cauchy pour les disques.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert dans $\mathbb{C}$ et $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe.
Soit $z_0\in\mathcal{U}$ et $r>0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)\subset\mathcal{U}$.

$$\forall z\in\mathbb{D}(z_0,r),\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Définition 5.38 Une fonction $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ vérifie *la formule de la moyenne*, lorsque pour tout $z\in\mathcal{U}$ et $r>0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z,r)\subset\mathcal{U}$, on a :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt$$

▪ **Remarque 5.39** *Autrement dit, la valeur de f au centre du cercle est la moyenne des valeurs de f sur le cercle.* ▪

Théorème 5.40 — Formule de la moyenne. Les fonctions holomorphes, les parties réelles, parties imaginaires de fonctions holomorphes vérifient la formule de la moyenne.

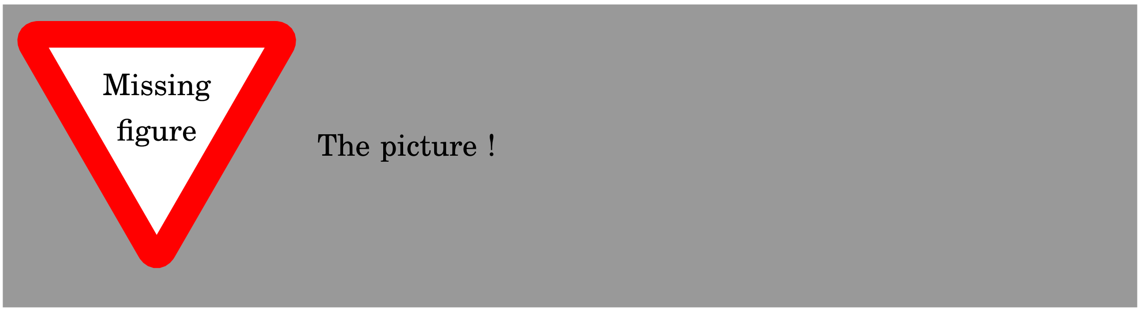
Démonstration. Soit f holomorphe, la formule de Cauchy avec $z=z_0$ donne avec :

$\gamma = \partial\mathbb{D}(z,r)$ donné par $\gamma(t) = z + re^{it}$, $\gamma'(t) = ire^{it}$.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{z+re^{it}-z} ire^{it} dt. \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it}) dt.
\end{aligned}$$

On applique la partie réelle à cette formule, on obtient la formule de la moyenne pour $\mathrm{Re}(f)$, idem pour $\mathrm{Im}(f)$. ■

Démonstration. Soit $\rho > 0$ tel que $\mathbb{D}(z,\rho) \subset \mathbb{D}(z_0,r)$, on note γ, γ_ρ, γ_1, γ_2 et γ_3, les 5 lacets tracés dans $\mathcal{U}$ comme sur la figure :



Clairement, on a :

$$\gamma - \gamma_\rho = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

La fonction définie sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$ par :

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$ (qui n'est pas un ouvert étoilé).

Pour $k = 1,2,3$, il existe un ouvert étoilé $\mathcal{V}_k$ tel que $\gamma_k \subset \mathcal{V}_k \subset \mathcal{U} \setminus \{z\}$. Par conséquent, pour tout $k = 1,2,3$, $\displaystyle\int_{\gamma_k} g(\zeta)d\zeta = 0$ et donc pour tout $\rho > 0$:

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_\rho} g(\zeta)d\zeta.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que :

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} g(\zeta)d\zeta = 2\pi i f(z)$$

Mais,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\rho} g(\zeta)d\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{\mathrm{i}\theta})}{\rho e^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta} d\theta \\ &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{\mathrm{i}\theta})d\theta \\ &\text{Mais } (\theta \mapsto f(z+\rho e^{\mathrm{i}\theta})) \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} (\theta \mapsto f(z)) \text{ uniformément.} \\ &\underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 2\pi \mathrm{i} f(z).\end{aligned}$$

■

Quelques exemples simples d'utilisation de la formule de Cauchy :

Exemple 5.41

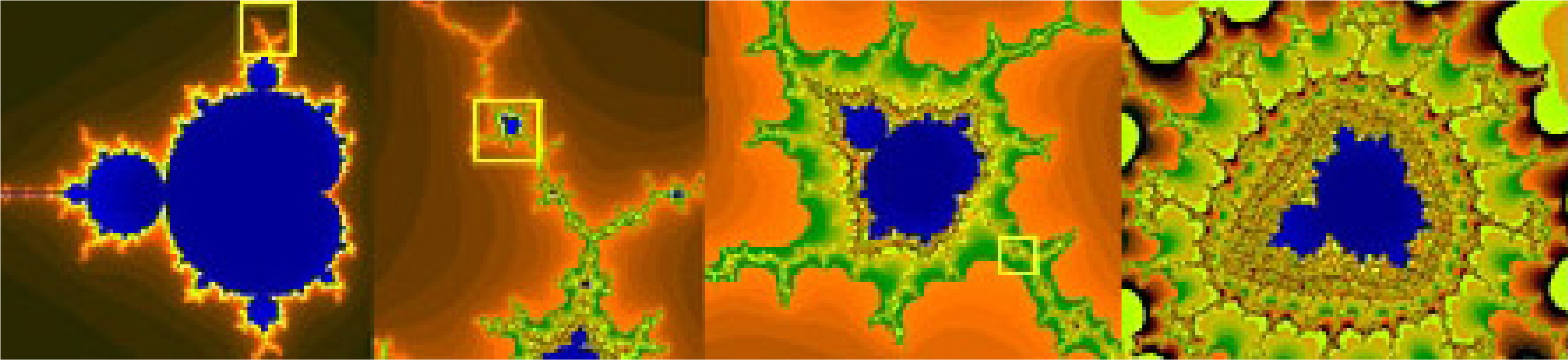
1. On veut calculer $\int_{\partial\mathbb{D}(-2i,2)} \frac{dz}{z^2+1}$. On a $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z-(-i))}$. Ici la fonction $f(z) = \frac{1}{z-i}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{i\} \supset \mathbb{D}(-2i,2)$, et $-i \in \mathbb{D}(-2i,2)$. Donc

$$\int_{\partial\mathbb{D}(-2i,2)} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i f(-i) = \frac{2\pi i}{-2i} = -\pi.$$

2. Calculons $\int_{\partial\mathbb{D}(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+i} dz$. La fonction $f(z) = \sin(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, le point $-i$ est dans $\mathbb{D}(0,2)$, donc

$$\int_{\partial\mathbb{D}(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \sin(-i) = \pi(e^1 - e^{-1}).$$

■



6. Application de la théorie de Cauchy

I Analycité

1 C'est quoi ?

Définition 6.1 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application. Soit $z \in \mathcal{U}$. On dit que f *est développable en série entière au voisinage de* z, s'il existe $R > 0$ avec $\mathbb{D}(0,R) \subset \mathcal{U}$, une série entière $\sum u_n h^n$ de rayon de convergence $\geqslant R$ tels que :

$$\forall h \in \mathbb{D}(0,R), \qquad f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n h^n$$

Définition 6.2 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est *analytique* sur $\mathcal{U}$ lorsque f est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathcal{U}$.

▪ **Remarque 6.3 — Analytique implique holomorphe (même infiniment).** Si f est analytique alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^k(z) = k! u_k.$$

▪

2 Holomorphe implique analytique

Théorème 6.4 — Développement des applications holomorphes. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique sur $\mathcal{U}$.

Plus précisement sur tout disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0,R)$ inclus dans $\mathcal{U}$,

$$\forall h \in \mathbb{D}(0,R), \qquad f(z_0+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n h^n$$

où

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

En particulier, f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et pour tout $z \in \mathcal{U}$ et pour tout $\in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Lemme 6.5 — Critère de développabilité.
Soit $f : \partial\mathbb{D}(z_0,R) \to \mathbb{C}$ continue. On définit F sur $\mathbb{D}(z_0,R)$ par :

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta.$$

Alors F est développable en série entière sur $\mathbb{D}(z_0,R)$, plus précisément :

$$F(w) = \sum_{n\geqslant 0} u_n (w-z_0)^n, \qquad \text{où} \qquad u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Démo du lemme. On peut supposer $z_0 = 0$, pour se simplifier la vie. On part d'un développement en série entière ultra-archi-classique, pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}(0,R)$ et $w \in \mathbb{D}(0,R)$:

$$\frac{1}{\zeta - w} = \frac{1}{\zeta}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\cdot\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{w}{\zeta}\right)^n$$

On a donc :

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\cdot\left(\frac{w}{\zeta}\right)^n d\zeta$$

On fixe un $w \in \mathbb{D}(0,R)$. La série de fonctions $\zeta \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{w}{\zeta}\right)^n$ converge normalement sur $\partial\mathbb{D}(0,R)$ puisque sur ce compact, on a :

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{w}{\zeta}\right)^n\right| \leqslant \frac{\|f\|_{\partial\mathbb{D}(0,R)}}{R}\cdot\left(|w|/R\right)^n \in \ell^1(\mathbb{N})$$

On peut donc intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ et obtenir :

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geqslant 0}\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\cdot\left(\frac{w}{\zeta}\right)^n d\zeta = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta\right) w^n$$

On pose, comme annoncé :

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$$

Ainsi,

$$F(w) = \sum_{n\geqslant 0} u_n w^n, \qquad \text{pour tout } w \in \mathbb{D}(0,R)$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n w^n$ est bien $\geqslant R$ puisque :

$$|u_n| \leqslant \frac{\|f\|_{\partial\mathbb{D}(0,R)}}{R^{n+1}}2\pi R$$

par la majoration max-longueur. ■

Démo du théorème. On part de la formule de Cauchy :

$$f(z+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+h)}d\zeta$$

Donc

$$f(z+h) = F(z+h) = \sum_{n\geqslant 0} u_n h^n$$

(F la fonction du lemme !) où

$$u_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

■

3 Sur les zéros des fonctions holomorphes

Un peu de vocabulaire topologique

Définition 6.6 Soit $X \subset \mathbb{C}$ un ensemble et $z \in \mathbb{C}$. Le point z est *un point d'accumulation* de X lorsque pour tout $R > 0$, $\mathbb{D}(z,R) \cap X$ contient un autre point que z. Autrement dit, s'il existe une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tel que :

- Les x_n sont tous distincts.
- $x_n \to z$.

On note $\mathrm{Acc}(X)$ l'ensemble des points d'accumulation de X.
Le point z est *un point isolé* de X lorsqu'il existe $R > 0$, $\mathbb{D}(z,R) \cap X = \{z\}$. On note $\mathrm{Isol}(X)$ l'ensemble des points isolés de X.

▪ **Remarque 6.7** On remarquera que par définition $\mathrm{Isol}(X) \subset X$ alors que $\mathrm{Acc}(X)$ n'a pas de raison d'être inclus dans X.

De plus, pour tout ensemble X, on a :

- $X \subset \mathrm{Isol}(X) \cup \mathrm{Acc}(X)$ et
- $\mathrm{Isol}(X) \cap \mathrm{Acc}(X) = \varnothing$.

▪

Exemple 6.8

— Si $X = \mathbb{D}$ alors $\mathrm{Acc}(\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{D}}$ et $\mathrm{Isol}(\mathbb{D}) = \varnothing$.

— Plus généralement, si $\mathcal{U}$ est ouvert alors $\mathrm{Acc}(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{U}}$ et $\mathrm{Isol}(\mathcal{U}) = \varnothing$.

— Si $X = \{1/n \,|\, n \geqslant 1\}$ alors $\mathrm{Acc}(X) = \{0\}$ et $\mathrm{Isol}(X) = X$.

— Si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de points $X = \{u_n \,|\, n \geqslant 0\}$ alors $\mathrm{Acc}(X)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(u_n)_n$ et $\mathrm{Isol}(X) = X \setminus \mathrm{Acc}(X)$.

— Si $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ alors $\mathrm{Acc}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Isol}(\mathbb{Q}) = \varnothing$.

— Si F est fermé alors $\mathrm{Acc}(F) = F \setminus \mathrm{Isol}(X)$.

■

Principe des zéros isolés

Théorème 6.9 — Les zéros ont un ordre – V1. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, non-nulle.
Si $f(a) = 0$ alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ et une "unique" fonction holomorphe $g : \mathbb{D}(a,R) \to \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{D}(a,R), \qquad f(z) = (z-a)^n g(z) \qquad \text{et} \qquad g(a) \neq 0.$$

L'entier n s'appelle *l'ordre d'annulation* de f en a.

Démonstration. Existence. Pour simplifier, on suppose $a = 0$. Il existe un disque $\mathbb{D}(0,R)$ sur lequel f admet un développement en série entière :

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 0} u_k z^k$$

Par hypothèse, $u_0 = 0$, mais la suite $(u_k)_k$ n'est pas nulle puisque f n'est pas nulle et $\mathcal{U}$ est connexe. On pose n le plus petit entier tel que $u_n \neq 0$ et $g(z) = \sum_{k \geqslant n} u_k z^{k-n}$. La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{D}(0,R)$ et vérifie :

$$f(z) = z^n g(z) \qquad \text{et} \qquad g(0) \neq 0.$$

Unicité. Soit (m,h) un autre couple, on suppose h et g définies sur le même disque . En faisant, le quotient, on obtient que

$$\forall z \in \mathbb{D}(0,R) \setminus \{0\}, \qquad \frac{z^n}{z^m} \frac{g(z)}{h(z)} = 1$$

On note $g(0), h(0) \neq 0$. Supposons $n > m$, alors en faisant tendre z vers zéro, on obtient $0 = 1$, absurde. De manière analoue, si $m > n$ alors on obtient $\infty = 1$, absurde. Donc $n = m$.

Par conséquent, $g(z) = h(z)$ pour $z \neq 0$. Mais, $g(0) = \lim_{z \to 0} f(z)/z^n = h(0)$. Donc $= h$ sur $\mathbb{D}(0,R)$. ■

Notation 6.1. *Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est une fonction, on note $\mathcal{Z}(f) = \{a \in \mathcal{U} \,|\, f(a) = 0\}$, l'ensemble des zéros de f.*

Si f est continue alors l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est un fermé de $\mathcal{U}$, attention il n'y a pas de raison que ce soit un fermé de $\mathbb{C}$.

Exemple : La fonction $f(z)=\sin(\pi/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, $\mathcal{Z}(f)=\{1/n \mid n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est un fermé de $\mathbb{C}^*$ mais $\mathcal{Z}(f)$ n'est pas un fermé dans $\mathbb{C}$.

On remarque au passage que tous les points de $\mathcal{Z}(f)$ sont isolés. Même si $\mathrm{Acc}(\mathcal{Z}(f))=\{0\}\neq\varnothing$, cependant on a $\mathrm{Acc}(\mathcal{Z}(f))\cap\mathbb{C}^*=\varnothing$.

Corollaire 6.10 — Principe des zéros isolés – V2. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe, non-nulle.

Si f s'annule en a alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f restreinte à $\mathcal{V}$ ne s'annule qu'en a.

Autrement dit, les zéros de f sont isolés .

Autrement dit, si les zéros de f s'accumulent sur un point $z\in\mathbb{C}$ alors $z\notin\mathcal{U}$.

Autrement dit, $\mathrm{Acc}(\mathcal{Z}(f))\cap\mathcal{U}=\varnothing$.

Démonstration. Par le théorème "les zéros ont un ordre - V1", il existe $n\in\mathbb{N}^*$ et g définie sur un disque $\mathbb{D}(a,R)$ tel que :

$$f(z)=(z-a)^n g(z),\quad \forall z\in\mathbb{D}(a,R)\quad \text{et}\quad g(a)\neq 0.$$

La fonction g est continue et $g(a)\neq 0$, ainsi g ne s'annule pas sur un voisinage de zéro. Par conséquent, il va de même pour f. Ceci signifie que a est un point isolé de $\mathcal{Z}(f)$.

Si z est un point d'accumulation d'une suite de zéros distincts de f et $z\in\mathcal{U}$ alors z est un zéro de f non-isolé, absurde. ∎

▪ **Exemple 6.11** La fonction $f(z)=\sin(\pi/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, $\mathcal{Z}(f)=\{1/n \mid n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\}$, ainsi $\mathrm{Acc}(\mathcal{Z}(f))=\{0\}$ et on a bien $\mathrm{Acc}(\mathcal{Z}(f))\cap\mathbb{C}^*=\varnothing$. ▪

Corollaire 6.12 ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe, non-nulle, sur un ouvert connexe alors :

— Pour tout compact $K\subset\mathcal{U}$, l'intersection $K\cap\mathcal{Z}(f)$ est finie, et

— $\mathcal{Z}(f)$ est au plus dénombrable.

Démo laissé en exo. Indication.

— Un compact infini possède un point d'accumulation.

— Tout ouvert de $\mathbb{C}$ est union dénombrable de compacts.

— Une union dénombrable d'ensemble fini est au plus dénombrable.

∎

Théorème 6.13 ($\mathcal{U}$ connexe) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions holomorphes $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ coïncident sur un ouvert non-vide $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ alors $f=g$ sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. $\mathcal{V}\subset\mathcal{Z}(f-g)$ est non-dénombrable (ou contient un point d'accumulation). ∎

On note $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ l'espace des fonctions holomorphes, c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un anneau, autrement dit c'est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Corollaire 6.14 ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. L'anneau $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ des fonctions holomorphes est intègre.

Démonstration. TD. ■

Principe du prolongement analytique

Théorème 6.15 — Principe du prolongement analytique. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non-vide connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes.
Il y a équivalence entre :

(i) $f = g$ sur $\mathcal{U}$.

(ii) $f = g$ sur $\mathcal{V}$ un ouvert non-vide de $\mathcal{U}$.

(iii) L'ensemble $S = \{z \in \mathcal{U} \mid f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$.

(iv) Il existe $c \in \mathcal{U}$ tel que $\forall k \in N$, $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$.

Démonstration. Quitte à changer f en $f - g$ et g en 0, on peut supposer que $g = 0$.

Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ et $(ii) \Rightarrow (iv)$ sont évidentes.

Montrons $(iii) \Rightarrow (iv)$. Soit c un point d'accumulation de l'ensemble $S = \mathcal{Z}(f)$. f est holomorphe et $\mathcal{U}$ est connexe donc par le principe des zéros isolés, $f = 0$, donc $\forall k \in N$, $f^{(k)}(c) = 0$.

Montrons maintenant $(iv) \Rightarrow (ii)$. Soit $c \in \mathcal{U}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(c) = 0$, f est holomorphe donc DSE en c mais tous ses coeffcients sont nuls, donc f est nulle sur un disque autour de c.

Le principe des zéros isolés montre que $(ii) \Rightarrow (i)$. ■

Corollaire 6.16 — Principe du prolongement analytique, Vprime.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Soit Ω ouvert connexe contenant $\mathcal{U}$, il existe au plus une fonction holomorphe $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $\tilde{f}_{|\mathcal{U}} = f$.

Démonstration. Soit $\hat{f}$ un autre prolongement de f alors on a $\tilde{f} = f = \hat{f}$ sur $\mathcal{U}$ donc $\tilde{f} = f = \hat{f}$ sur Ω par le Principe du prolongement analytique (Ω est connexe). ■

▪ **Remarque 6.17 — En pratique.** S'il existe $\mathcal{V}$ un ouvert $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ est connexe et $g \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$ tel que $f = g$ sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, on prend $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}_{|\mathcal{U}} = f$ et $\tilde{f}_{|\mathcal{V}} = g$. La fonction F est bien holomorphe. Et ce prolongement est unique puisque $\Omega = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ est connexe. On peut remarquer que les hypothèses imposent $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$. ▪

▪ **Exemple 6.18** On a défini la fonction ζ de Rieman sur $H_1 = \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 1\}$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

On a aussi défini la fonction η de Dirichlet sur $H_0 = \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0\}$ par :

$$\eta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

On a montré que :

$$\forall s \in H_1, \qquad \eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

La fonction :

$$\tilde{\zeta}(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$$

est définie sur $H_0 \smallsetminus \mathcal{Z}(1-2^{1-s})$ et coïncide avec ζ sur H_1. On peut donc prolonger la fonction ζ à $H_0 \smallsetminus \mathcal{Z}(1-2^{1-s})$ par $\tilde{\zeta}$, puisqu'elle que soit la façon de prolonger ζ le résultat sera le même !

Pour info, $\mathcal{Z}(1-2^{1-s}) = 1 + \frac{2\pi i}{\ln(2)}\mathbb{Z}$ et en fait on peut même prolonger ζ à $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$, (wikipedia recense 6 façons de faire). ∎

Théorème 6.19 — Les zéros ont un ordre – 2. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, non-nulle.

Si $f(a) = 0$ alors il existe un unique couple $(n, g) \in \mathbb{N} \times \mathcal{H}(\mathcal{U})$ tel que :

$$\forall z \in \mathcal{U}, \qquad f(z) = (z-a)^n g(z) \qquad \text{et} \qquad g(a) \neq 0.$$

Démonstration. La première version du théorème "Les zéros ont un ordre" donne un entier n et une fonction holomorphe g définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0.

On pose : $\hat{g}(z) = f(z)/z^n$. La fonction $g \in \mathcal{H}(\mathcal{V})$, la fonction $\hat{g} \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \smallsetminus \{a\})$ et elles coïncident sur $\mathcal{V} \smallsetminus \{a\}$, il existe donc une fonction $\tilde{g} \in \mathcal{H}(\underbrace{\mathcal{V} \cup \mathcal{U} \smallsetminus \{a\}}_{=\mathcal{U}})$ qui les prolongent par le principe du prolongement analytique, et cette fonction est unique, par le principe du prolongement analytique. ∎

4 Théorème de prolongement de Riemann

Théorème 6.20 — Théorème de prolongement de Riemann.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{U}$, et f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U} \smallsetminus \{z_0\}$.
LASSE

1. f se prolonge en une fonction holomorphe $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.
2. f se prolonge en une fonction continue sur $\mathcal{U}$.
3. f est bornée au voisinage de z_0.
4. $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

Démonstration. Les implications $(1.) \Rightarrow (2.) \Rightarrow (3.) \Rightarrow (4.)$ sont évidentes. Il nous reste à montrer que $(4.)$ implique $(1.)$. On suppose donc que $(z-z_0)f(z) \to 0$ lorsque

$z \to z_0$. On peut supposer que $z_0 = 0$. On définit

$$h(z) = \begin{cases} z^2 f(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Il est clair que h est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{0\}$, et en $z = 0$ on a :

$$\frac{h(z) - h(0)}{z} = z f(z) \to 0.$$

Donc h est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et donc développable en série entière au voisinage de 0. Comme $h(0) = h'(0) = 0$, on a :

$$h(z) = u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots + u_n z^n + \ldots.$$

Soit $\tilde{f}(z) = \frac{h(z)}{z^2}$. Au voisinage de 0 on a $\tilde{f}(z) = a_2 + a_3 z + \ldots$ donc $\tilde{f}$ est holomorphe sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0, et $\tilde{f} = f$ sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$. La fonction f admet donc un prolongement holomorphe. ∎

II Définitions équivalentes de l'holomorphie

Définition 6.21 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f est admet localement des $\mathbb{C}$-primitives si pour tout $z \in \mathcal{U}$, il existe $\mathcal{V}_z \subset \mathcal{U}$ ouvert et $F : \mathcal{V}_z \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que $F' = f|_{\mathcal{V}_z}$.

Théorème 6.22 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. LASSE

1. f est holomorphe sur $\mathcal{U}$.
2. Pour tout triangle plein $T \subset \mathcal{U}$, $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.
3. f admet localement des $\mathbb{C}$-primitives.
4. Pour tout disque ouvert $\mathbb{D}(z_0, R)$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z_0, R) \subset \mathcal{U}$, on a :

$$\forall z \in \mathbb{D}(z_0, R), \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z_0, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

5. f est analytique sur $\mathcal{U}$.

▪ **Remarque 6.23** (2.) ⇒ (1.) s'appelle le Théorème de Morera. ▪

Démonstration. — $(1) \Rightarrow (2)$: C'est le lemme de Goursat.

— $(2) \Rightarrow (3)$: Soit $z \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}_z = \mathbb{D}(0, R) \subset \mathcal{U}$ avec R suffisament petit. L'ouvert $\mathbb{D}(0, R)$ est étoilé, donc "la préparation à Cauchy étoilé" montre que $f_{|\mathcal{V}_z}$ admet une $\mathbb{C}$-primitive.

— $(3) \Rightarrow (1)$: C'est une conséquence du fait que si F est holomorphe alors F' est holomorphe.

— $(1) \Rightarrow (4)$: C'est la formule intégrale de Cauchy pour les disques.

— $(4) \Rightarrow (5)$: C'est le lemme de développabilité.

— $(5) \Rightarrow (1)$: Les séries entières sont holomorphes.

■

III Les inégalités de Cauchy pour les dérivées

1 C'est quoi ?

Théorème 6.24 — Formule de Cauchy pour les dérivées. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0,R)$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0,R), \qquad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

Démonstration. Soit $\rho > 0$ tel que $\mathbb{D}(z,\rho) \subset \mathbb{D}(z_0,R)$, le théorème "Développement des applications holomorphes" montre que :

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

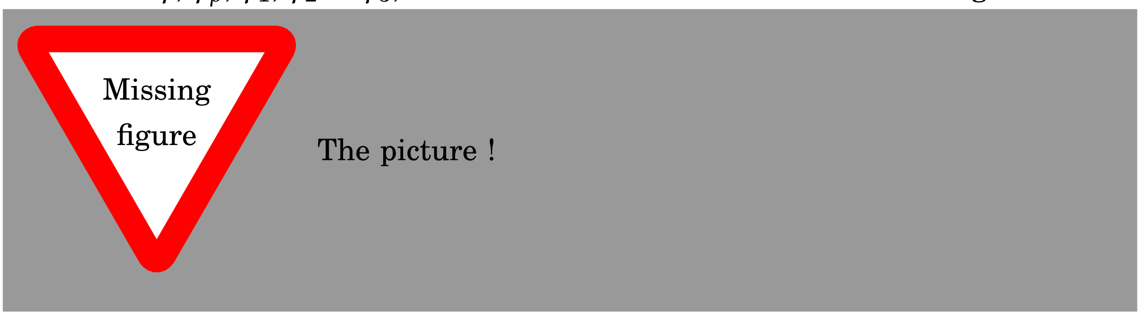
Le théorème est donc une conséquence du lemme suivant : ■

Lemme 6.25 Soit deux disques emboités $\mathbb{D}(z,\rho) \subset \mathbb{D}(z_0,R)$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de la couronne fermée $\overline{\mathbb{D}}(z_0,R) \setminus \mathbb{D}(z,\rho)$. Alors :

$$\int_{\partial \mathbb{D}(z_0,R)} f(\zeta) d\zeta = \int_{\partial \mathbb{D}(z,\rho)} f(\zeta) d\zeta$$

Démonstration. On l'a déjà fait (Démo de la formule de Cauchy pour les disques) et j'aurais du la mettre dans un lemme ...

on note γ, γ_ρ, γ_1, γ_2 et γ_3, les 5 lacets tracés dans $\mathcal{U}$ comme sur la figure :



Clairement, on a :

$$\gamma - \gamma_\rho = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

La fonction définie sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$ par :

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z\}$ (qui n'est pas un ouvert étoilé).

Pour $k = 1,2,3$, il existe un ouvert étoilé (même convexe) $\mathcal{V}_k$ tel que $\gamma_k \subset \mathcal{V}_k \subset \mathcal{U} \setminus \{z\}$. Par conséquent, pour tout $k = 1,2,3$, $\int_{\gamma_k} g(\zeta)d\zeta = 0$ et donc :

$$\int_{\gamma} g(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_\rho} g(\zeta)d\zeta.$$

■

Théorème 6.26 — **Inégalités de Cauchy.** Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert, f une fonction holomorphe sur un voisinage du disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0,R)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f^{(k)}(z_0)| \quad \leqslant \quad \frac{k!}{R^k}\|f\|_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)(z_0,R)}.$$

Démonstration. On a par le Theorème 6.4 (DSE des applications holomorphes),

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta$$

Mais

$$\left\|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right\|_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} \quad \leqslant \quad \frac{\|f\|_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)}}{R^{k+1}}$$

Donc

$$|f^{(k)}(z_0)| \quad \leqslant \quad \frac{k!}{2\pi}\frac{\|f\|_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)}}{R^{k+1}}\mathrm{Long}(\partial\mathbb{D}(z_0,R)) = \frac{k!}{2\pi}\frac{\|f\|_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)}}{R^{k+1}}2\pi R.$$

■

2 Le théorème de convergence de Weierstrass

Théorème 6.27 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{U}$ vers f_∞. Alors

1. f_∞ est holomorphe sur $\mathcal{U}$, et
2. pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{U}$ vers $f_\infty^{(k)}$.

Proposition 6.28
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathcal{U}$ un compact, Ω un ouvert tel que $K \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$ et $\overline{\Omega}$ est compact.
Il existe une constante $C_{K,\Omega,k} > 0$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}), \quad \|f^{(k)}\|_K \leqslant C_{K,\Omega,k}\|f\|_{\overline{\Omega}}$$

Notation 6.2. *Si $A, B \subset \mathbb{C}$, on note :*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf_{z\in A, w\in B}|z - w|.$$

■ **Remarque 6.29**

$$C_{K,\Omega,k} = \frac{k!}{\mathrm{dist}(K,\mathbb{C}\setminus\Omega)^k}$$

■

Lemme 6.30 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact, $F \subset \mathbb{C}$ un fermé alors $\mathrm{dist}(K,F)$ est atteint. Ainsi, si $K \cap F = \varnothing$ alors $\mathrm{dist}(K,F) > 0$.

Démonstration. Montrons qu'il existe $k \in K, f \in F$ tel que $\mathrm{dist}(K,F) = |k-f|$. Soit $(k_n, f_n) \in (K \times F)^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est à dire tel que :

$$|k_n - f_n| \to \mathrm{dist}(K,F) =: R.$$

Comme K est compact, on peut supposer que $k_n \to k_\infty$. Pour n assez grand,

$$|f_n - k_\infty| \leqslant |f_n - k_n| + |k_n - k_\infty| \leqslant (2R+1)+1$$

En particulier, la suite $(f_n)_n$ est bornée, on peut donc supposer que $f_n \to f_\infty \in \mathbb{C}$. Mais $f_\infty \in F$ puisque F est fermé. Ainsi,

$$\mathrm{dist}(K,F) = |k_\infty - f_\infty| > 0$$

puisque $K \cap F = \varnothing$. ■

Lemme 6.31 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $\rho > 0$ alors :

$$K' := \bigcup_{z \in K} \overline{\mathbb{D}}(z, \rho)$$

est compact.

Démonstration. On considère l'application continue :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & K \times \overline{\mathbb{D}}(0,\rho) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (k, \alpha) & \longmapsto & k + \alpha \end{array}$$

Comme, l'image d'un compact par une application continue est compacte et $K' = \sigma(K \times \overline{\mathbb{D}}(0,\rho))$, K' est compacte. ■

Démonstration. On pose $R = \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Comme $K \subset \Omega$, $K \cap \mathbb{C} \setminus \Omega = \varnothing$ et on a :

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = R > 0$$

par le lemme précédent. De plus, par définition du réel $R = \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$:

$$\forall z \in K, \qquad \mathbb{D}(z, R) \cap \mathbb{C} \setminus \Omega = \varnothing$$

Autrement dit,

$$\forall z \in K, \qquad \mathbb{D}(z, R) \subset \Omega$$

Par conséquent,

$$\forall z \in K, \qquad \overline{\mathbb{D}}(z, R) \subset \overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$$

L'inégalité de Cauchy montre alors :

$$\forall z \in K, \qquad |f^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k! \|f\|_{\partial \mathbb{D}(z,R)}}{R^k} \leqslant \frac{k! \|f\|_{\overline{\Omega}}}{R^k}$$

■

Démonstration.

1. La fonction f_∞ est continue sur $\mathcal{U}$ car les fonctions f_n sont continues et la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts de $\mathcal{U}$ vers f_∞. Soit $T \subset \mathcal{U}$ un triangle plein. Alors

$$\int_{\partial T} f_\infty(z) dz = \int_{\partial T} \lim_{n \to \infty} f_n(z) dz \overset{\text{cv unif}}{\overbrace{=}} \lim_{n \to \infty} \underbrace{\int_{\partial T} f_n(z) dz}_{=0} = 0$$

d'après le lemme de Goursat. Donc f_∞ est holomorphe (d'après la partie II de ce chapitre "Définitions équivalentes de l'holomorphie - Thm de Morera").

2. Soit K un compact. On note :

$$\rho := \frac{1}{2}\mathrm{dist}(K, \mathbb{C}\setminus\mathcal{U}) > 0 \quad , \quad K' := \bigcup_{z\in K} \overline{\mathbb{D}}(z,\rho) \subset \mathcal{U} \quad , \quad \Omega := \mathrm{Int}(K') \supset K$$

On a bien $K' \subset \mathcal{U}$ puisque :

$$\forall z \in K, \qquad \mathbb{D}(z,\rho) \cap \mathbb{C}\setminus\mathcal{U} = \varnothing$$

Ainsi, Ω est un ouvert contenant K et d'adhérence compacte incluse dans $\mathcal{U}$. On a, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\| f_n^{(k)} - f_\infty^{(k)} \|_K \leqslant C_{K,\Omega,k} \underbrace{\| f_n - f_\infty \|_{\overline{\Omega}}}_{\longrightarrow 0}$$

puisque $\overline{\Omega}$ est compact. Donc $\| f_n^{(k)} - f_\infty^{(k)} \|_K \longrightarrow 0$.

■

3 Le théorème de Liouville

Rappelons-nous qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dite entière.

Théorème 6.32 — Liouville. Toute fonction entière bornée est constante.

Démonstration. On note $M = \|f\|_{\mathbb{C}} < \infty$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, comme $\overline{\mathbb{D}}(z,R) \subset \mathbb{C}$, les inégalités de Cauchy (avec $n = 1$) donne :

$$\forall R > 0, \qquad |f'(z)| \leqslant \frac{1!}{R^1} M = \frac{M}{R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $f' = 0$, donc f est constante. ■

Corollaire 6.33 Il n'existe pas biholomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$, (donc pas de biholomorphisme non plus entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$).

Voici une démonstration d'un théorème que vous connaissez très bien. Le Théorème de Liouville donne une démonstration agréable.

4 Théorème fondamental de l'algèbre par le Théorème de Liouville

Théorème 6.34 — D'Alembert-Gauss.
Tout polynôme non constant à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.

On rappelle l'énoncé suivant :

Lemme 6.35 — Croissance des polynômes.
Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ un polynome de degré n. Alors il existe $R > 0$ tel que

pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geqslant R$ on a

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \quad \leqslant \quad |P(z)| \quad \leqslant \quad 2|a_n||z|^n.$$

Démonstration.

$$\frac{P(z)}{a_n z^n} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'où le résultat. ■

Et voici une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

Démonstration du Théorème 6.34, Démo 1 par Liouville.
Supposons qu'il existe un polynôme P de degré $n \geqslant 1$ qui n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction $f = \frac{1}{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe. D'après le Lemme de croissance, $|P(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to \infty$. Mais alors f est bornée, et donc constante d'après le théorème de Liouville, impossible car $n \geqslant 1$. ■

IV Le principe du maximum

1 C'est quoi ?

■ **Rappel 6.36** Une fonction $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un maximum local lorsque :

$$\exists z \in \mathcal{U}, \exists \rho > 0, \forall \zeta \in \mathbb{D}(z,\rho), \varphi(\zeta) \leqslant \varphi(z)$$

■

Théorème 6.37 — Principe du maximum. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f holomorphe sur $\mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum local alors f est constante.

Mieux, si f n'est pas constante alors pour tout $z \in \mathcal{U}$, pour tout $\rho > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z,\rho) \subset \mathcal{U}$, il existe ζ tel que $|f(\zeta)| > |f(z)|$ et $|\zeta - z| = \rho$.

2 La démo par Gutzmer-Parseval

Théorème 6.38 — Formule de Gutzmer-Parseval. Soit f la somme de la série entière $\sum_n u_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence strictement superieur à $r > 0$. Alors

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2 dt}_{\text{Moyenne de } |f|^2 \text{ sur } \partial\mathbb{D}(z_0,r)} = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 r^{2n}$$

Démonstration. On peut supposer $z_0 = 0$. On écrit $z = re^{it}$ Ainsi :

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 &= f(z)\overline{f(z)} \\
&= \Big(\sum_{n\geqslant 0} u_n r^n e^{int}\Big)\Big(\sum_{p\geqslant 0} \overline{u_p} r^p e^{-ipt}\Big) \\
&= \sum_{n,p\geqslant 0} u_n \overline{u_p} r^{n+p} e^{i(n-p)t} \qquad \text{puisque } \sum_{n,p\geqslant 0} |u_n\overline{u_p}| r^{n+p} = \Big(\sum_{n\geqslant 0} |u_n| r^n\Big)^2 < \infty
\end{aligned}
$$

La série $\sum_{n,p\geqslant 0} u_n\overline{u_p} r^{n+p} e^{i(n-p)t}$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \sum_{n,p\geqslant 0} u_n\overline{u_p} r^{n+p} e^{i(n-p)t} dt \\
&= \sum_{n,p\geqslant 0} \int_0^{2\pi} u_n\overline{u_p} r^{n+p} e^{i(n-p)t} dt \\
&= \sum_{n,p\geqslant 0} u_n\overline{u_p} r^{n+p} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt \\
&= 2\pi \sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2 r^{2n}
\end{aligned}
$$

puisque :

$$
\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}
$$

■

Démo du principe du Maximum. Soit f holomorphe sur $\mathcal{U}$. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en $z_0 \in \mathcal{U}$. Alors, pour tout r suffisamment petit :

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt \quad \leqslant \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 dt \quad \leqslant \quad |f(z_0)|^2.
$$

Mais

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt = \sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} = |f(z_0)|^2 + \sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n}
$$

Donc :

$$
\forall n \geqslant 1, \quad f^{(n)}(z_0) = 0.
$$

Donc f est constante sur un voisinage de z_0, donc f est constante sur $\mathcal{U}$ par le principe du prolongement analytique ($\mathcal{U}$ est connexe). ■

Théorème 6.39 ($\mathcal{U}$ connexe et borné)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et borné et $f : \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}$ tel que f est non-constante, holomorphe sur $\mathcal{U}$ et continue sur $\overline{\mathcal{U}}$. Alors,

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad |f(z)| < \sup_{\zeta \in \partial \mathcal{U}} |f(\zeta)|$$

Démonstration. Comme $\mathcal{U}$ est borné, le fermé $\overline{\mathcal{U}}$ est compact. La fonction $|f|$ est continue sur le compact $\overline{\mathcal{U}}$, elle possède donc un maximum global M.

Cas 1 : il existe $z_0 \in \mathcal{U}$ tel que $|f(z_0)| = M$. Dans ce cas, $|f| : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ admet un maximum local, donc f est constante, absurde.

Cas 2 : il existe $z_1 \in \partial \mathcal{U}$ tel que $|f(z_1)| = M$ et pour tout $z \in \mathcal{U}$, $|f(z)| < M$. Ben... c'est ce que l'on voulait montrer... ■

V Théorème de l'image ouverte

1 C'est quoi ?

Ici nous allons montrer que fonctions holomorphes non constantes sont des applications ouvertes.

Définition 6.40 Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y est dite **ouverte** si l'image $f(U)$ de tout ouvert $U \subset X$ est un ouvert de Y.

Théorème 6.41 — Théorème de l'image ouverte. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si f n'est pas constante, alors f est une application ouverte.

2 Démo par le principe du minimum

Théorème 6.42 — Principe du minimum. ($\mathcal{U}$ connexe)
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si $|f|$ admet un minimum local alors celui est nul. En particulier, f s'annule dans $\mathcal{U}$.

Démonstration. Supposons que f admet un minimum local en $z_0 \in \mathcal{U}$. Pour tout $R > 0$ suffisament petit, on a alors :

$$|f(z_0)| \leqslant \inf_{z \in \partial \mathbb{D}(z_0, R)} |f(z)|.$$

Par l'absurde, supposons que $f(z_0) \neq 0$. Comme f est continue, il existe alors $\rho > 0$, tel que f ne s'annule pas sur $\mathbb{D}(z_0, \rho)$.

On définit $g = \frac{1}{f} : \mathbb{D}(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$, elle est holomorphe. Et, on a :

$$|g(z_0)| \geqslant \sup_{z \in \partial \mathbb{D}(z_0, R)} |g(z)|.$$

Mais le Principe du Maximum montre,

$$|g(z_0)| < \sup_{z \in \partial \mathbb{D}(z_0,R)} |g(z)|,$$

absurde. Donc $f(z_0) = 0$. ∎

Démo du théorème de l'application ouverte. Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ un ouvert et $z_0 \in \mathcal{V}$. Il faut montrer que $f(\mathcal{V})$ contient une boule centrée en $f(z_0)$.

Comme $f - f(z_0)$ n'est pas constante, d'après le principe des zéros isolés, il existe $\rho > 0$, tel que $\mathbb{D}(z_0,\rho) \subset \mathcal{V}$ et $f(\zeta) \neq f(z_0)$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}(z_0,\rho)$. On pose :

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{\zeta \in \partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} |f(\zeta) - f(z_0)| > 0.$$

Pour conclure, on va montrer que $\mathbb{D}(f(z_0),\delta) \subset f(\mathbb{D}(z_0,\rho))$, à l'aide du principe du minimum.

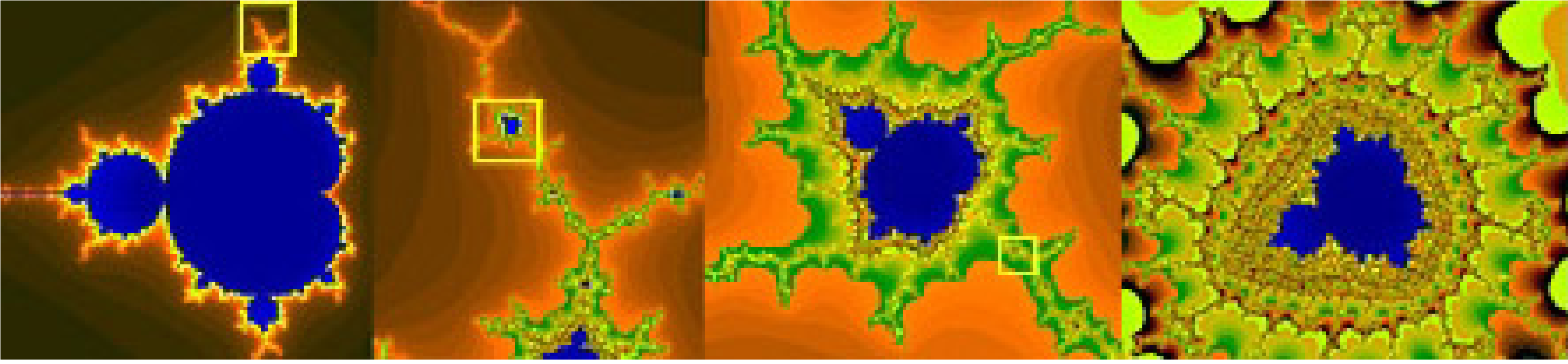
Soit $w \in \mathbb{D}(f(z_0),\delta)$. On va montrer que la fonction $g := f - w$ a un zéro dans $\mathbb{D}(z_0,\rho)$.

$$\begin{aligned}
\min_{\zeta \in \partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} |g(\zeta)| = \min_{\zeta \in \partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} |f(\zeta) - w| &= \min_{\zeta \in \partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} |f(\zeta) - f(z_0) + f(z_0) - w| \\
&\geqslant \underbrace{\min_{\zeta \in \partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} |f(\zeta) - f(z_0)|}_{=2\delta} - \underbrace{|f(z_0) - w|}_{<\delta} \\
&\geqslant \delta
\end{aligned}$$

Donc

$$\min_{\zeta \in \partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} |g(\zeta)| \quad \geqslant \quad \delta \quad > \quad |f(z_0) - w| = |g(z_0)|$$

Le minimum de g est donc atteint à l'intérieur de $\mathbb{D}(z_0,\rho)$. Par le principe du minimum, g possède un zéro dans $\mathbb{D}(z_0,\rho)$. ∎



7. Théorie des résidus

Définition 7.1 Un ensemble $V \subset \mathbb{C}$ est *un voisinage de l'∞*, s'il contient le complémentaire d'un ensemble compact.

Notation 7.1. *On notera les disques épointés de la façon suivante :*
$\mathbb{D}^*(a,R) := \mathbb{D}(a,R) \setminus \{a\}$ *et* $\overline{\mathbb{D}}^*(a,R) := \overline{\mathbb{D}}(a,R) \setminus \{a\}$.

Définition 7.2 Soit $a, \ell \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Soit f une fonction définie sur un disque épointé $\mathbb{D}^*(a,\rho)$ pour un certain $\rho > 0$. On dit que $f(z) \to \ell$ quand $z \to a$ lorsque :

— Cas $a, \ell \in \mathbb{C}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |z-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

— Cas $a \in \mathbb{C}$, $\ell = \infty$:

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |z-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z)| > M$$

— Cas $a = \infty$, $\ell = \infty$:

$$\forall M > 0, \quad \exists R > 0, \quad |z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| > M$$

— Cas $a = \infty$, $\ell \in \mathbb{C}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R > 0, \quad |z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

I Les 3 types de singularités isolées

1 Le lemme

Lemme 7.3 Soit $f : \mathcal{U} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe alors l'une des trois alternatives exclusives suivantes est vérifiées :

1. La fonction f est bornée au voisinage de z_0. Dans ce cas f se prolonge en z_0 en une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$.
2. La fonction f tend vers ∞ en z_0. Dans ce cas, il existe un unique couple $(n,g) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{H}(\mathcal{U})$ tel que :
$$\forall z \in \mathcal{U} \setminus \{z_0\}, \qquad z^n f(z) = g(z) \qquad \text{et} \qquad g(0) \neq 0.$$
3. Pour tout $\rho > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0) \subset \mathcal{U}$, l'ouvert $f(\mathbb{D}^*(z_0,\rho))$ est dense dans $\mathbb{C}$.

▪ **Rappel 7.4** L'ensemble $f(\mathbb{D}^*(z_0,\rho))$ est un ouvert par le théorème de l'image ouverte. ▪

Démonstration. Le premier point est donné par le théorème de prolongement de Riemann.

Supposons que f n'est pas bornée et $f(\mathbb{D}^*(z_0,\rho))$ n'est pas dense pour un certain $\rho > 0$. Montrons qu'alors f vérifie le second point. Il existe $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que :

$$f(\mathbb{D}^*(z_0,\rho)) \cap \mathbb{D}(a,r) = \varnothing.$$

Autrement dit,
$$\forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,\rho), \qquad |f(z) - a| > r.$$
Ou encore :
$$\forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,\rho), \qquad \left|\frac{1}{f(z)-a}\right| < r^{-1}.$$
Ainsi, la fonction φ définie par $\mathbb{D}^*(z_0,\rho)$:

$$\varphi(z) := \frac{1}{f(z)-a}$$

est holomorphe $\mathbb{D}^*(z_0,\rho)$ et bornée. Le théorème de prolongement de Riemann montre que φ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0,\rho)$. De plus :

$$\forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,\rho), \qquad f(z) = a + \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Mais f n'est pas bornée au voisinage de z_0 donc $\varphi(z_0) = 0$. Donc :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

(On a montré la première partie du point 2.)
Soit n l'ordre d'annulation de φ en z_0, il existe $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(z_0,\rho))$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{D}(z_0,\rho), \qquad \varphi(z) = (z - z_0)^n \psi(z) \qquad \text{et} \qquad \psi(0) \neq 0.$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,\rho), \qquad (z-z_0)^n f(z) = \frac{1}{\psi(z)} + a(z-z_0)^n$$

On définit la fonction g par :

$$g(z) := \frac{1}{\psi(z)} + a(z-z_0)^n,$$

la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0,\rho)$ et vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,\rho), \qquad g(z) = (z-z_0)^n f(z) \quad \text{et} \quad g(0) \neq 0.$$

La fonction g se prolonge à $\mathcal{U}$ par la formule $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$. Exo : montrer l'unicité du couple (n,g). ■

2 La définition

Définition 7.5 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, on dit que z_0 est une **singularité isolée** de f.

— Une singularité isolée de f est dite **effaçable** (ou **apparente**) si f peut être prolongée en une fonction holomorphe $\tilde{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.

— Une singularité isolée de f est un **pôle** si $f(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} \infty$.

— Une singularité isolée de f qui n'est ni effaçable ni un pôle est appelée singularité **essentielle**.

Le lemme précédent se résume ainsi :

Théorème 7.6 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe.

1. La singularité z_0 est effaçable si et seulement si f est bornée au voisinage de z_0.
2. La singularité z_0 est un pôle si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $g = (z-z_0)^n f$ peut être prolongée en une fonction holomorphe $\tilde{g} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.

   Dans ce cas, l'entier

   $$m := \min\{n \in \mathbb{N} : (z-z_0)^n f \text{ est bornée dans un voisinage } z_0\} \geqslant 1.$$

   s'appelle l'ordre du pôle z_0. Si $m = 1$, on dit que z_0 est un *pôle simple*.
3. La singularité z_0 est essentielle si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de z_0, $f(\mathcal{V})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

■ **Exemple 7.7** Quelques exemples élémentaires.

1. La singularité 0 de $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ est effaçable.
2. La fonction $z \mapsto \frac{\cos(z)}{z}$ a un pôle simple en 0.

3. Les fonctions $z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ et $z \mapsto \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ ont une singularité essentielle en 0. On justifie seulement pour $e^{1/z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to 0^+} \exp\left(1/x\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \exp\left(1/x\right) = 0.$$

Donc $e^{1/z}$ n'est pas bornée au voisinage de 0, et ne tend pas vers ∞ non plus.

■

3 Fonctions méromorphes

Définition 7.8 Une partie $P \subset \mathbb{C}$ est *discrète* lorsque tous les points de P sont isolés, c'est-à-dire :

$$\forall p \in P, \exists r > 0, \quad P \cap \mathbb{D}(p,r) = \{p\}.$$

Définition 7.9 Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction f est dite *méromorphe* sur $\mathcal{U}$ s'il existe un fermé discret $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{U}$ tel que f est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}(f)$ et f a un pôle en tout point de $\mathcal{P}(f)$.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.

■ **Exemple 7.10** Quelques exemples :

1. Toute fonction f holomorphe sur $\mathcal{U}$ est aussi méromorphe sur $\mathcal{U}$ avec $\mathcal{P}(f) = \varnothing$.
2. Toute fraction rationnelle (quotient de polynômes) est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

■

4 Développement au voisinage des pôles

Théorème 7.11 — Au voisinage des pôles.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe non-nulle. Si z_0 est une singularité effaçable ou un pôle alors :

1. Il existe un unique couple $(n,g) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{H}(\mathcal{U})$ tel que :

$$g(z_0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{z_0\}, \qquad f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

L'entier n s'appelle *l'ordre de* f en z_0, on le note :

$$\omega_{z_0}(f) := n.$$

2. Il existe un unique couple $(P, \tilde{f}) \in \mathbb{C}[z] \times \mathcal{H}(\mathcal{U})$ tel que :

$$P(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{z_0\}, \qquad f(z) = P\left(\frac{1}{z - z_0}\right) + \tilde{f}(z).$$

3. $P = 0$ si et seulement si z_0 est une singularité effaçable.
4. Le degré de P est égale à l'ordre du pôle z_0.

Démonstration. Si z_0 est une singularité effaçable. On a déjà tout démontré précédemment. Supposons que z_0 est un pôle.

Il existe un entier m (l'ordre du pôle z_0) tel que la fonction $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et $g(z_0) \neq 0$. Et,

$$\forall z \in \mathcal{U} \setminus \{z_0\}, \qquad f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z).$$

Ce qui donne le premier point. De plus, g se développe en séries entières au voisinage de z_0 et on peut écrire, dans un disque $\mathbb{D}(z_0,R)$:

$$\forall z \in \mathbb{D}(z_0,R), \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n (z-z_0)^n.$$

Alors $\forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,R)$:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{u_0}{(z-z_0)^m} + \frac{u_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{u_{m-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m+n}(z-z_0)^n$$

On pose $\tilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m+n}(z-z_0)^n$ qui est holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0,R) \subset \mathcal{U}$ et $P(z) = u_0 z^m + u_1 z^{m-1} + \cdots + u_{m-1}$.

On a bien $P(0) = u_0 = g(z_0) \neq 0$, $\deg(P) = m$ l'ordre de z_0 et pour tout $z \in \mathbb{D}^*(z_0,R)$:

$$f(z) = P\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \tilde{f}(z) \qquad (\star).$$

On définit $\tilde{f}$ sur $\mathcal{U} \setminus \mathbb{D}(z_0,R)$ en utilisant l'équation $(\star)$. Comme g est unique, les coefficients b_i et la fonction $\tilde{f}$ sont aussi uniques. ■

▪ **Remarque 7.12** D'après le Théorème 7.11, si f est une fonction méromorphe sur $\mathcal{U}$ et $z_0 \in \mathcal{P}(f)$ est un pôle de f, alors au voisinage de z_0, f se developpe en une série de Laurent avec un nombre fini de termes d'indices négatifs :

$$\exists r > 0, \forall z \in \mathbb{D}^*(z_0,r), \qquad f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n.$$

▪

Corollaire 7.13 Si f,g sont méromorphes non-nulles sur $\mathcal{U}$ alors :

1. $f+g$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$ et
$$\forall z \in \mathcal{U}, \qquad \omega_z(f+g) \geqslant \min(\omega_z(f), \omega_z(g)).$$
2. fg est méromorphe sur $\mathcal{U}$ et
$$\forall z \in \mathcal{U}, \qquad \omega_z(fg) = \omega_z(f) + \omega_z(g).$$

Démonstration. Exo. ■

Proposition 7.14 L'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ est :

1. un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. un anneau.
3. un $\mathbb{C}(z)$-espace vectoriel.
4. une $\mathbb{C}$-algèbre, même une $\mathbb{C}(z)$-algèbre.
5. Si $\mathcal{U}$ est connexe alors $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ est un corps.

Démonstration. Les 4 premiers points sont laissés en exercice. On suppose $\mathcal{U}$ connexe. Soit f non-nulle méromorphe sur $\mathcal{U}$. Vérifions que $1/f$ est aussi méromorphe sur $\mathcal{U}$.

Comme f est non-nulle et $\mathcal{U}$ est connexe, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est un fermé discret de l'ouvert $\mathcal{U}$ par le principe des zéros isolés. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{Z}(f)\cup\mathcal{P}(f)$ est encore un fermé discret de $\mathcal{U}$. La fonction $1/f$ est définie et holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus(\mathcal{Z}(f)\cup\mathcal{P}(f))$ qui est un ouvert non-vide.

Si $z_0\in\mathcal{P}(f)$ alors $f(z)\underset{z\to z_0}{\longrightarrow}\infty$ donc $1/f(z)\underset{z\to z_0}{\longrightarrow}0$, donc la singularité z_0 est effaçable. Ainsi, $1/f$ est holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\mathcal{Z}(f)$.

Enfin tout zéro de f est un pôle de $1/f$. C'est une conséquence du fait que si $f(p)=0$ alors $1/f(z)\underset{z\to p}{\longrightarrow}\infty$. ■

II Indice d'un point par rapport à une courbe

1 C'est quoi ?

Théorème 7.15 — Théorème de relèvement de l'angle.
Soit $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un chemin tracé dans $\mathbb{C}^*$ et $\theta_a\in\mathbb{R}$ tel que $\gamma(a)=|\gamma(a)|e^{i\theta_a}$.

1. Il existe une unique fonction, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t\in[a,b],\quad \gamma(t)=|\gamma(t)|e^{i\theta(t)}\qquad\text{et}\qquad \theta(a)=\theta_a.$$
2. $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$$
3. Si γ est un lacet alors :
$$\theta(b)-\theta(a)\in2\pi\mathbb{Z}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}\in\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Pour le point 1. Puisque γ est un chemin, on peut supposer γ est $\mathcal{C}^1$. Quitte à appliquer le théorème à $\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$, on peut supposer que pour tout $t\in[a,b],|\gamma(t)|=1$. On raisonne par analyse et synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une telle fonction θ, on a alors :
$$\forall t\in[a,b],\quad \gamma'(t)=i\theta'(t)e^{i\theta(t)}=i\theta'(t)\gamma(t)$$

On doit avoir :
$$\forall t \in [a,b], \quad \theta'(t) = \frac{\gamma'(t)}{i\gamma(t)}.$$

A priori, $\frac{\gamma'(t)}{i\gamma(t)} \in \mathbb{C}^*$ mais,

$$\forall t \in [a,b], \quad |\gamma(t)|^2 = 1 = (\gamma(t)|\gamma(t)).$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire canonique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, donc :

$$\forall t \in [a,b], \quad (\gamma'(t)|\gamma(t)) = 0.$$

Donc, en fait :
$$\forall t \in [a,b], \quad \frac{\gamma'(t)}{i\gamma(t)} \in \mathbb{R}^*.$$

Fin de l'analyse. Synthèse. On pose,

$$\theta(t) = \hat{\theta} + \int_a^t \frac{\gamma'(t)}{i\gamma(t)} dt$$

On vérifie aisément que la dérivée de la fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $\frac{e^{i\theta(t)}}{\gamma(t)}$ est nulle. La fonction θ est good to go si et seulement si :

$$\gamma(a) = e^{i\theta(a)} = e^{i\hat{\theta}}$$

Donc, il faut et il suffit de prendre $\hat{\theta} = \theta_a$. Fin du point 1.

On écrit :
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{i\gamma(t)} = \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$$

Fin du point 2.

Si γ est un lacet alors :

$$e^{i\theta(b)} = \gamma(b) = \gamma(a) = e^{i\theta(a)}$$

Donc $\theta(b) - \theta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. ■

Définition 7.16 Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$. On définit *l'indice de γ par rapport à z* par :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) := \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

où θ est une fonction telle que :

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma(t) - z = |\gamma(t) - z| e^{i\theta(t)}$$

2 Propriétés de l'indice

Proposition 7.17 Soit γ un lacet. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$:

1. $\mathrm{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathrm{Ind}(\overrightarrow{\gamma}, z) = -\mathrm{Ind}(\gamma, z)$.
3. La fonction $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma) \ni z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est continue.
4. La fonction $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma) \ni z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$.

■ **Remarque 7.18** $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est le nombre de tour que fait γ autour de z. ■

Démonstration.

1. C'est la dernière conclusion du théorème de relèvement de l'angle.
2. Exo.
3. On écrit :
$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$
On pose :
$$\varphi(t, z) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$
et on se donne un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$. On a :
   (a) $[0,1] \times \overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \ni (t, z) \mapsto \varphi(t, z)$ est continue.
   (b) Il existe M tel que pour tout $(t, z) \in [0,1] \times \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$, $|\varphi(z, t)| \leqslant M$.

   Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est continue sur $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$, donc continue en z_0. Mais z_0 est quelconque.
4. Soit Ω une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$, comme la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. L'image de Ω par $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est un sous-ensemble connexe inclus dans $\mathbb{Z}$ donc réduit à un point.

■

Définition 7.19 Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin parametré fermé dans $\mathbb{C}$. *L'intérieur* de γ est l'ensemble :
$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma) \mid \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$
et *l'extérieur* de γ est l'ensemble
$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma) \mid \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}.$$
Ainsi
$$\mathbb{C} = \mathrm{Int}(\gamma) \cup \mathrm{Image}(\gamma) \cup \mathrm{Ext}(\gamma).$$

Proposition 7.20 Si $K \subset \mathbb{C}$ est compact alors l'ouvert $\mathbb{C} \setminus K$ possède une unique composante connexe non-bornée.

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $K \subset \mathbb{D}(0,R)$. Soit Ω_1, Ω_2 deux composantes connexes non-bornées de $\mathbb{C} \setminus K$.

Soit $z_i \in \Omega_i$ tel que $|z_i| > R$, il est facile de joindre z_1 à z_2 dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0,R)$, donc dans $\mathbb{C} \setminus K$. Donc $\Omega_1 = \Omega_2$. ∎

Proposition 7.21 L'ensemble $\mathrm{Ext}(\gamma)$ contient la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$.

Démonstration. L'intégrale
$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
et donc $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ pour $|z|$ assez grand. ∎

▪ **Remarque 7.22** On peut avoir des composantes bornées dans l'extérieur, si γ n'est pas un lacet simple. ▪

▪ **Rappel 7.23** Un lacet est simple lorsque $\gamma : [a,b[\to \mathbb{C}$ est injective. ▪

3 Exemples

Le cercle

Si γ parcourt le cercle de centre z_0 et de rayon r, alors :
- $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ si $a \in \mathbb{D}(z_0, r)$, et
- $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$.

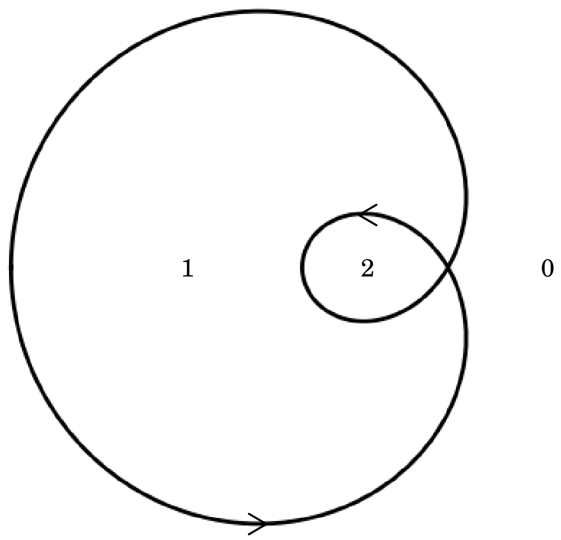
Ainsi $\mathrm{Int}(\gamma) = \mathbb{D}(z_0, r)$ et $\mathrm{Ext}(\gamma) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$.

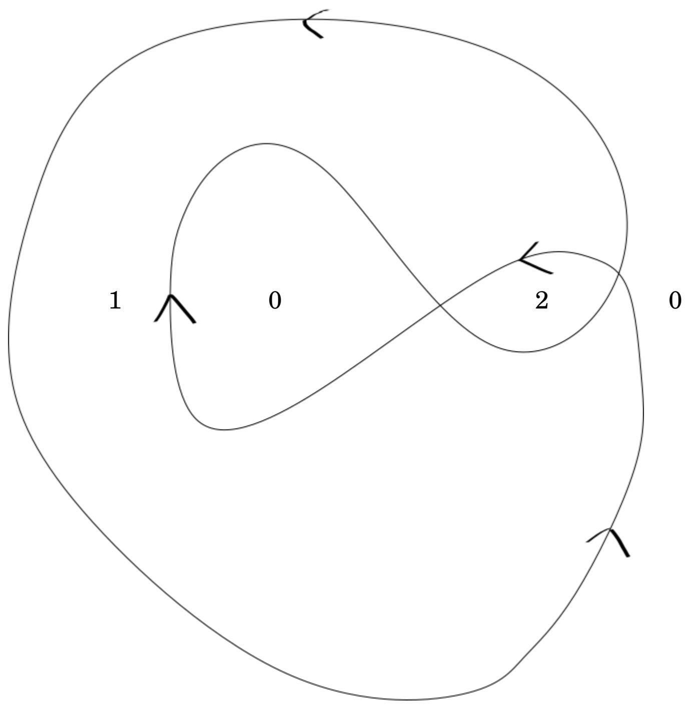
Le théorème de Jordan

Théorème 7.24 — Théorème de Jordan - Admis.
Soit γ un lacet simple tracé dans $\mathbb{C}$ alors :
1. $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$ possède deux composantes connexes, une bornée, une non-bornée.
2. Celle qui est non-bornée, c'est $\mathrm{Ext}(\gamma)$, l'indice de point par rapport à γ est égale à 0.
3. L'autre c'est $\mathrm{Int}(\gamma)$, l'indice de point par rapport à γ est égale à 1,si γ tourne en sens direct, et -1 si γ tourne en sens horaire.

▪ **Remarque 7.25** En TD et en examen, en présence d'un lacet simple dessiné, vous avez le droit de dire : "Clairement, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$ possède deux composantes connexes, une bornée, une non-bornée.... Clairement l'indice de bidule est égale à 1 et l'indice de truc est égale à 0."

Bref, vous avez le droit de dire que les conclusions du théorème de Jordan sont clairement réalisées pour le lacet simple considéré. ▪


1
2
0


1
0
2
0

Des dessins

Formule

III Théorème de Cauchy (dernière version)

Théorème 7.26 — Théorème de Cauchy.
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et γ un lacet tracé dans $\mathcal{U}$ tel que l'intérieur $\mathrm{Int}(\gamma)$ de γ est inclus dans $\mathcal{U}$. Alors

1. Pour tout f holomorphe sur $\mathcal{U}$ on a :

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$$

2. Pour tout f holomorphe sur $\mathcal{U}$ et pour tout $z_0 \in \mathcal{U} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta \quad = \quad f(z_0)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_0).$$

Exercice 7.27 Montrer que si γ est un lacet quelconque tracé dans $\mathcal{U}$ tel que : Pour tout f holomorphe sur $\mathcal{U}$, $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$ alors $\mathrm{Int}(\gamma) \subset \mathcal{U}$. ▪

Démonstration. Admise, voir Poly. ∎

Démonstration. On commence par remarquer qu'il suffit de montrer le second point. Supposons le second vérifiée pour tout f holomorphe. Soit f holomorphe, on applique le second point à la fonction :

$$g(z) = (z - z_0)f(z)$$

On obtient :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = g(z_0)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 0.$$

▪ **Remarque 7.28** Le premier point implique aussi le second ! Exo ! ▪

Montrons maintenant le second point. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

On pose

$$g(\zeta,z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & (\zeta,z)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}, \zeta\neq z \\ \\ f'(z), & (\zeta,z)\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}, \zeta=z \end{cases}$$

On souhaite montrer que pour tout $z_0 \in \mathcal{U}\setminus \mathrm{Image}(\gamma)$:

$$\int_\gamma g(\zeta,z_0)d\zeta = 0 \qquad (\text{☆}).$$

On admet pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 7.29 La fonction $h:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ définie par

$$h(z) := \int_\gamma g(\zeta,z)d\zeta$$

est holomorphe sur $\mathcal{U}$.

Nous allons montrer que h admet un prolongement holomorphe $\tilde{h}$ sur $\mathbb{C}$ tel que $\tilde{h}(z)\to 0$ quand $z\to\infty$, et puis nous allons appliquer le Théorème de Liouville.

On définit

$$h^*(z) := \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \qquad z\in \mathrm{Ext}(\gamma).$$

Par le Corollaire **??**, h^* est holomorphe sur $\mathrm{Ext}(\gamma)$.

Soit $z\in\mathcal{U}\cap\mathrm{Ext}(\gamma)$. On a

$$h(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta = h^*(z) - f(z)\int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}d\zeta = h^*(z)$$

donc $h=h^*$ sur $\mathcal{U}\cap\mathrm{Ext}(\gamma)$. Comme $\gamma\cup\mathrm{Int}(\gamma)\subset\mathcal{U}$, on a $\mathbb{C}\setminus\mathcal{U}\subset\mathrm{Ext}(\gamma)$ et on peut définir

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z), & z\in\mathcal{U} \\ h^*(z), & z\in\mathrm{Ext}(\gamma). \end{cases}$$

On a donc une fonction entière $\tilde{h}$.

La Majoration max-longueur montre :

$$|h^*(z)| \leqslant L(\gamma)\|f\|_\gamma \left\|\frac{1}{\zeta-z}\right\|_\gamma \xrightarrow[z\to\infty]{} 0.$$

Donc $\tilde{h}\to 0$ lorsque $z\to\infty$. En particulier $\tilde{h}$ est bornée et donc constante par Liouville. Comme $\tilde{h}\to 0$ quand $z\to\infty$, on conclut que $\tilde{h}=0$. Nous avons montré que $h=0$. ■

Pour montrer le lemme 7.29, il faut encore un lemme.

Lemme 7.30
— La fonction g est continue sur $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$.
— Pour tout $\zeta\in\mathcal{U}$, la fonction $g_\zeta(z)=g(\zeta,z)$ est holomorphe.

Démo du lemme 7.30. Il est clair que g est continue au voisinage d'un point (ζ,z) avec $\zeta\neq z$. Il est clair que g_ζ est holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\{\zeta\}$.

Mais la fonction g_ζ est continue en ζ, donc le théorème de prolongement de Riemann montre que g_ζ est holomorphe.

Il reste la continuité au voisinage d'un point (z,z). Pour se simplifier la vie, on suppose que $z=0$. La fonction f est DSE en O (convergente dans le disque $\mathbb{D}(0,R)$), ainsi :

$$f(\zeta)-f(z)\sum_{n\geqslant 0}u_n(z^n-w^n)$$

Mais :

$$z^n-w^n=(\zeta-z)(\zeta^{n-1}+\zeta^{n-2}z+\cdots+\zeta z^{n-2}+z^{n-1})$$

On obtient que :

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=\sum_{n\geqslant 1}u_n(\zeta^{n-1}+\zeta^{n-2}z+\cdots+\zeta z^{n-2}+z^{n-1})=\sum_{p,q\geqslant 0}u_{p+q+1}\zeta^p z^q$$

qui est une série entière en deux variables convergentes sur le "bidisque" $\mathbb{D}(0,R)\times\mathbb{D}(0,R)$. En particulier, continue. ∎

IV Résidus

Définition 7.31 Soit $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ un ouvert, $z_0\in\mathcal{U}$ et f holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\{z_0\}$.
Si $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)\subset\mathcal{U}$ alors l'intégrale $\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)}f(\zeta)d\zeta$ ne dépend pas de r.
Le *résidu* de f en z_0 est la quantité :

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)}f(\zeta)d\zeta.$$

Démonstration. Montrer que cette intégrale ne dépend pas de r, exo ! ∎

Proposition 7.32 Soit $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ un ouvert, $z_0\in\mathcal{U}$ et f holomorphe sur $\mathcal{U}\setminus\{z_0\}$.
On suppose que f a un pôle d'ordre m en z_0 et on se donne le développement en série de Laurent de f en z_0 :

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\tilde{f}(z).$$

avec $a_i\in\mathbb{C}$ et $\tilde{f}\in\mathcal{H}(\mathcal{U})$. Alors :

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f)=a_{-1}.$$

Démonstration. Comme $\tilde{f}$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$,

$$\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} \tilde{f}(\zeta)d\zeta = 0.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} (\zeta - z_0)^k d\zeta = 0$ si $k \neq -1$ et $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} (\zeta - z_0)^{-1} d\zeta = 2\pi i$. Ainsi

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{a_{-1}}{\zeta - z_0}d\zeta = a_{-1}.$$

■

Théorème 7.33 — Théorème des résidus.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe, γ un lacet tracé dans $\mathcal{U}$ tel que $\mathrm{Int}(\gamma) \subset \mathcal{U}$.
Soit $S \subset \mathcal{U} \setminus \mathrm{Image}(\gamma)$ un ensemble fini.
Soit $f : \mathcal{U} \setminus S \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta \quad = \sum_{z_0 \in S \cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Ind}(\gamma, z_0)\mathrm{Res}_{z_0}(f).$$

Démo sous l'hypothèse supplémentaire que f n'a pas de singularité essentielle dans $\mathcal{U}$. Soit $S = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, on suppose que pour tout $z_i \in S$, z_i est un pôle ou une singularité effaçable de f, et on écrit le DSL de f en z_i

$$f(z) = \frac{a_{i,-m_i}}{(z - z_i)^{m_i}} + \frac{a_{i,-m_i+1}}{(z - z_i)^{m_i - 1}} + \ldots + \frac{a_{i,-1}}{z - z_i} + \tilde{f}_i(z),$$

où m_i est l'ordre du pôle z_i ($m_i = 0$ si z_i est effaçable). Considérons les fonctions

$$h_i : z \mapsto \sum_{k=-m_i}^{-1} a_{i,k}(z - z_i)^k.$$

On remarque que la fonction $f - \sum_{i=1}^n h_i$ est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus S$ et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$, par le théorème de prolongement de Riemann. Comme $\mathrm{Int}(\gamma) \subset \mathcal{U}$, on a donc d'après le Théorème 7.26,

$$\int_\gamma \Big(f(\zeta) - \sum_{i=1}^n h_i(\zeta)\Big)d\zeta = 0.$$

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\int_\gamma h_i(\zeta)d\zeta = \sum_{k=-m_i}^{-1} \int_\gamma a_{i,k}(\zeta - z_i)^k d\zeta$$

Si $k \neq -1$, la fonction $z \mapsto a_{i,k}(z - z_i)^k$ admet une $\mathbb{C}$-primitive dans $\mathcal{U} \setminus \{z_i\}$, et alors

$$\int_\gamma a_{i,k}(\zeta - z_i)^k d\zeta = 0,$$

donc

$$\int_\gamma h_i(\zeta)d\zeta = \int_\gamma a_{i,-1}(\zeta - z_i)^{-1}d\zeta = 2\pi i a_{i,-1}\operatorname{Ind}_\gamma(z_i) = 2\pi i \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(z_i)\operatorname{Res}_{z_i}(f).$$

On obtient finalement :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Ind}_\gamma(z_i)\operatorname{Res}_{z_i}(f).$$

■

V Quelques règles de calcul de résidus

Proposition 7.34 Soit f, g holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$.

1. Pour $a, b \in \mathbb{C}$ on a :

$$\operatorname{Res}_{z_0}(af + bg) = a\operatorname{Res}_{z_0}(f) + b\operatorname{Res}_{z_0}(g).$$

2. Si z_0 est un pôle simple de f, alors

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0).$$

3. Si $f = g/h$ avec $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$. Alors f a un pôle simple en z_0 et

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

4. Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, on pose :

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

Alors

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Démonstration.

1. Linéarité de l'intégrale.
2. Comme z_0 est un pôle simple, on a :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \tilde{f}(z)$$

où $\tilde{f}$ est holomorphe dans un voisinage de z_0. On a bien $\lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) = a_{-1}$.

3.

$$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} g(z)\frac{(z - z_0)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0.$$

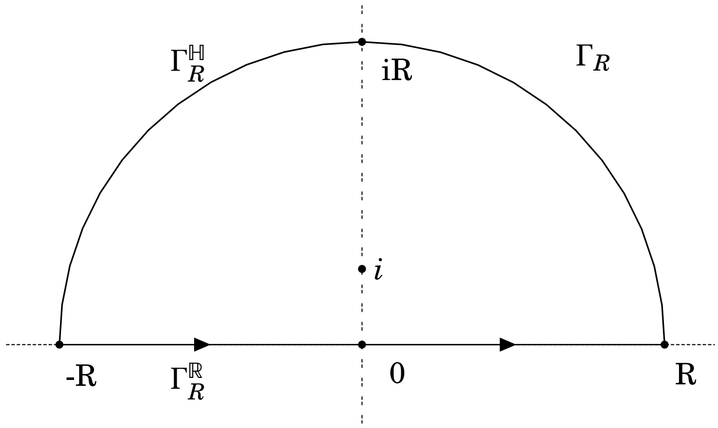


FIGURE 7.1 – Le contour Γ_R.

Donc z_0 est un simple pôle de f et $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

4. Exo.

∎

VI Quelques exemples d'utilisation du théorème des résidus

1 Premier exemple

Proposition 7.35

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Démo sans utiliser arctan. On considère la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$. La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec uniquement des pôles simples en i et $-i$ et on a :

$$\mathrm{Res}_i(f) = \frac{1}{2i}.$$

Par le théorème des résidus, appliqués au lacet Γ_R :

$$\forall R > 1, \qquad \int_{\Gamma_R^{\mathbb{R}}} f(z)dz + \int_{\Gamma_R^{\mathbb{H}}} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_i(f) = \pi$$

Mais

$$\int_{\Gamma_R^{\mathbb{R}}} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$\left| \int_{\Gamma_R^{\mathbb{H}}} f(z)dz \right| \leqslant \frac{1}{R^2-1}\pi R \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

∎

2 Deuxième exemple

Proposition 7.36 Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{|a|}e^{-|ab|}$$

Démonstration. On commence par supposer $a, b > 0$ et on considère la fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$ donnée par :

$$f(z) = \frac{e^{ibz}}{a^2+z^2}.$$

Elle possède deux pôles en $\pm ia$, ils sont tous deux simples. Le résidu de f en ia se calcule par la règle donnée plus haut :

$$\text{Res}_{ia}(f) = \frac{e^{-ab}}{2ia}$$

Par le théorème des résidus, appliqués au lacet Γ_R (le même que le coup d'avant) : On a :

$$\forall R > a, \qquad \int_{\Gamma_R^{\mathbb{R}}} f(z)dz + \int_{\Gamma_R^{\mathbb{H}}} f(z)dz = 2\pi i \,\text{Res}_{ia}(f) = \frac{\pi}{a}e^{-ab}$$

Mais

$$\int_{\Gamma_R^{\mathbb{R}}} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} f(x)dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}dx.$$

En écrivant $z = x+iy$, on a :

$$e^{ibz} = e^{-by}e^{ibx}$$

Donc,

$$\forall z \in \mathbb{H}, \qquad |e^{ibz}| \leqslant \underbrace{e^{-by} \leqslant 1}_{\text{car } b>0 \text{ et } z\in\mathbb{H}}$$

$$\left|\int_{\Gamma_R^{\mathbb{H}}} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-a^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est bon pour $a, b > 0$. Après, c'est une histoire de symétrie. On écrit $e^{ibx} = \cos(bx) + i\sin(bx)$. Il est clair que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{a^2+x^2}dx$$

qui ne dépend que de $|a|$ et $|b|$. On obtient donc que : Pour tout $a, b \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{|a|}e^{-|ab|}$$

La formule est encore vraie pour $b = 0$. ∎

3 Troisième exemple

Proposition 7.37

$$\zeta(2) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démonstration. On considère la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$$

L'ensemble des pôles de f est l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$. Les entiers $n \neq 0$ sont des pôles simples et un calcul direct montre que :

$$\mathrm{Res}(f, n) = \frac{1}{n^2}.$$

Le point 0 est un pôle triple de f. Le DSL de cot en 0 est donnée par :

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \cdots = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}$$

Où, les B_{2n} sont les nombres de Bernoulli. Donc :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi}{z^2}\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} + \frac{\pi^3 z^3}{45} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + \frac{\pi^4 z^3}{45} + \frac{2\pi^6}{945} + \cdots \end{aligned}$$

On considère le carré $\square_N = [-N - 1/2, N + 1/2]^2$.

On applique le théorème des résidus, on obtient :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \square_N} f(z) dz = \sum_{n=-1}^{-N} \mathrm{Res}(f, n) + \mathrm{Res}(f, 0) + \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Res}(f, n)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\square_N} f(z) dz = 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3}$$

Le truc, c'est que $\cot(\pi z)$ est bornée sur $\partial \square_N$, indépendamment de N. Ainsi, on notant M une borne du module de $\pi \cot(\pi z)$ sur les $\partial \square_N$, on obtient :

$$\left| \int_{\partial \square_N} f(z) dz \right| \leqslant \frac{M}{N^2}(4(2N+1)) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On obtient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$2 \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} = 0$$

∎

■ **Remarque 7.38** Si on se concentre, on voit qu'avec la même technique, on peut aussi montrer :

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

en utilisant :

$$g(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^4} \qquad \text{puis} \qquad h(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^6}.$$

■

Démo de cot *est bornée sur* $\partial\square_N$ *indépendamment de* N. Pour $z = \pm(N + 1/2) + iy$.

$$\begin{aligned}
|\cot(\pi z)| &\leqslant \frac{|e^{i\pi z} + e^{i\pi z}|}{|e^{i\pi z} - e^{i\pi z}|} \\
&\leqslant \frac{|e^{2i\pi z} + 1|}{|e^{2i\pi z} - 1|} \\
&\leqslant \frac{|e^{-2\pi y} e^{2(N+1/2)i\pi} + 1|}{|e^{-2\pi y} e^{2(N+1/2)i\pi} - 1|} \\
&\leqslant \frac{|-e^{-2\pi y} + 1|}{|-e^{-2\pi y} - 1|} \\
&\leqslant \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \\
&\leqslant 1
\end{aligned}$$

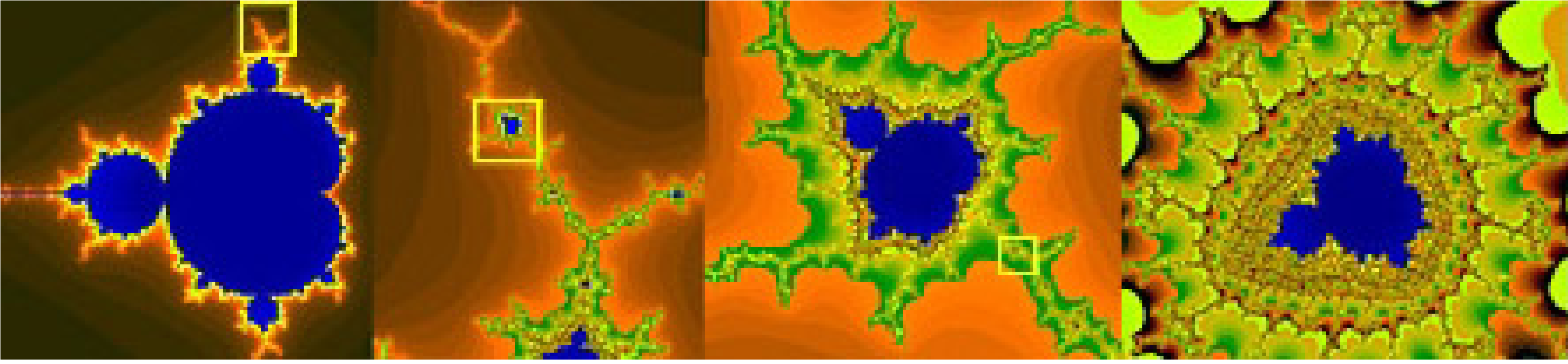
Pour $z = x + (N + 1/2)i$.

$$\begin{aligned}
|\cot(\pi z)| &\leqslant \frac{|e^{2i\pi z} + 1|}{|e^{2i\pi z} - 1|} \\
&\leqslant \frac{|e^{-2\pi(N+1/2)} e^{2xi\pi} + 1|}{|e^{-2\pi(N+1/2)} e^{2xi\pi} - 1|} \\
&\leqslant \frac{1 + e^{-2\pi(N+1/2)}}{1 - e^{-2\pi(N+1/2)}} \qquad \text{décroissant en } N \\
&\leqslant 2 \qquad \text{car} \qquad 3e^{-\pi} \leqslant 1
\end{aligned}$$

Pour $z = x - (N + 1/2)i$.

$$\begin{array}{rcll}
|\cot(\pi z)| & \leqslant & \dfrac{|e^{2i\pi z}+1|}{|e^{2i\pi z}-1|} & \\
 & \leqslant & \dfrac{|e^{2\pi(N+1/2)}e^{2xi\pi}+1|}{|e^{2\pi(N+1/2)}e^{2xi\pi}-1|} & \\
 & \leqslant & \dfrac{e^{2\pi(N+1/2)}+1}{e^{2\pi(N+1/2)}-1} & \text{décroissant en } N \\
 & \leqslant & 2 \quad \text{car} \quad e^{\pi} \leqslant 3 &
\end{array}$$

■



8. Lien entre l'analyse complexe et le cal

I Applications $\mathbb{C}$-linéaires vs $\mathbb{R}$-linéaires

L'espace $\mathbb{C}$, est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension 1 et aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z = x + iy & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

est un $\mathbb{R}$-isomorphisme d'espace vectoriel, et on identifiera $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ via cette application, implicitement tout le temps.

Toute matrice 2×2 réelle

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

induit une application $\mathbb{R}$-linéaire $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$T(x + iy) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = ax + by + i(cx + dy)$$

En particulier, $T(1) = a + ic$ et $T(i) = b + id$.

Lemme 8.1 L'application T est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si :

$$a = d \qquad \text{et} \qquad b = -c.$$

Dans ce cas, $T(x + iy) = (a + ic)(x + iy)$, autrement dit $T(z) = (a + ic)z$.

Démonstration. Si T est $\mathbb{C}$-linéaire alors :

$$b+id=T(i)=iT(1)=i(a+ic)$$

La condition est donc nécessaire. Supposons que la condition est vérifiée, on a alors (vérification en exo) :

$$T(x+iy)=(a+ic)(x+iy)$$

autrement dit :

$$T(z)=(a+ic)z$$

qui est bien $\mathbb{C}$-linéaire. ∎

II Les équations de Cauchy-Riemann

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0=x_0+iy_0\in\mathcal{U}$. Soit $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ une application. On note (pour tout le chapitre) :

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

Autrement dit :

$$u:\begin{array}{ccc}\mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x+iy))\end{array} \quad \text{et} \quad v:\begin{array}{ccc}\mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x+iy))\end{array}$$

1 Différentiabilité - crash recall

Définition 8.2 $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$ est *différentiable* en $z_0=(x_0,y_0)\in D\subset\mathbb{R}^2$ s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-T(h)}{h}=0$$

Dans ce cas, on note $T=Df_{z_0}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ et l'appelle la *différentielle* de f en z_0.

Si f est différentiable en $z_0=(x_0,y_0)$ alors les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ existent et la différentielle de f en $z_0=(x_0,y_0)$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\end{bmatrix}$$

2 Le lien

Théorème 8.3 Soit $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$, $z_0=x_0+iy_0\in D$. Alors sont équivalents :

1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0=x_0+iy_0$.
2. f est différentiable en $z_0=(x_0,y_0)$ et la différentielle $Df_{z_0}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$ en z_0 est $\mathbb{C}$−linéaire.
3. f est différentiable en $z_0=(x_0,y_0)$ et satisfait les équations de Cauchy-

Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Dans ce cas :

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Démonstration.

1. ⇒ 2. Supposons que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Par définition :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h}{h}=0.$$

Ainsi, :

1. f est différentiable en z_0.
2. L'application $h\mapsto f'(z_0)h$ est la différentielle de f en z_0.
3. Celle-ci est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

2. ⇒ 1. Supposons que f est différentiable en $z_0=(x_0,y_0)$ et la différentielle $Df_{z_0}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$ en z_0 est $\mathbb{C}$−linéaire.
Il existe donc $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-linéaire tel que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-T(h)}{h}=0.$$

Comme T est $\mathbb{C}$-linéaire, il existe $w\in\mathbb{C}$ tel que :

$$T(h)=wh$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)-wh}{h}=0.$$

Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $f'(z_0)=w$.

2. ⇔ 3. La différentielle Df_{z_0} a pour matrice dans la base canonique :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix},$$

Le lemme 8.1 montre l'équivalence entre le fait que cette application est $\mathbb{C}$-linéaire et les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

— On a vu que si la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, alors elle représente la multiplication par $a+ic$. Donc, dans notre cas, on obtient : Df_{z_0} est la multiplication par $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$, donc :

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$$

■

Corollaire 8.4 Soit $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$, $z_0=x_0+iy_0\in\mathcal{U}$. Alors sont équivalents :

1. f est holomorphe.
2. f est différentiable en tout point $z_0\in\mathcal{U}$ et la différentielle $Df_{z_0}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}$−linéaire.
3. f est différentiable en tout point $z_0\in\mathcal{U}$ et satisfait les équations de Cauchy-Riemann.

III Fonctions harmoniques

1 C'est quoi ?

Définition 8.5 — Laplacien.

L'application linéaire $\begin{array}{rccc}\Delta: & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{U})\\ & u & \longmapsto & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{array}$ s'appelle le *Laplacien*.

Définition 8.6 — Fonctions harmoniques. Soit $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}$ ouvert et $u:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$. On dit que u est *harmonique* lorsque :

$$\forall(x_0,y_0)\in\mathcal{U},\qquad \Delta u(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)=0$$

Théorème 8.7 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ holomorphe. Les parties réelle et imaginaire $u=\mathrm{Re}(f)$ et $v=\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques.

Démonstration. Comme f est $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\mathcal{U}$, $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et satisfait les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Comme f est holomorphe, f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable, les fonctions u et v sont donc $\mathcal{C}^\infty$.

On dérive la première équation par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

puis la deuxième par rapport à y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Comme les dérivées partielles mixtes de v sont égales par le théorème de Schwarz, on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. L'harmonicité de v se démontre de façon identique. ■

Théorème 8.8 — Théorème de Schwarz. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \text{sur } \mathcal{U}.$$

IV Conformité et holomorphie

1 Angles entre deux vecteurs

Définition 8.9 Soit $u, v \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non-nuls. Il existe une unique rotation R tel que :

$$v/\|v\| = R\left(u/\|u\|\right)$$

L'angle entre u et v, noté $\theta(u,v)$, est l'unique $\theta \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ tel que :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Définition 8.10 Un application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *conserve les angles (orientés de vecteurs)* lorsque T est inversible et :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \quad \theta(T(u), T(v)) = \theta(u,v).$$

Lemme 8.11 Une application $\mathbb{R}$-linéaire $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ conserve les angles si et seulement si T est $\mathbb{C}$-linéaire.

Démonstration. Si T est $\mathbb{C}$-linéaire et inversible, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad T(z) = \alpha z.$$

Autrement dit, T est la composée de l'homothétie de rapport $|\alpha|$ et de la rotation d'angle $\arg(\alpha)$. Ainsi, T conserve les angles.

Supposons que T conserve les angles. On pose $\alpha := T(1)$. On va montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad T(z) = \alpha z.$$

Comme T est $\mathbb{R}$-linéaire, il suffit de montrer que :

$$T(i) = \alpha i.$$

L'application T conserve les angles donc :

$$\theta(T(1), T(i)) = \theta(1, i) = \pi/2.$$

Il existe donc $\lambda > 0$ tel que :

$$T(i) = \lambda \alpha i$$

On doit montrer que $\lambda = 1$. On a aussi :

$$\theta(T(1+i), T(1-i)) = \theta(1+i, 1-i) = \pi/2.$$

Mais :

$$T(1+i) = T(1) + T(i) = \alpha + i\lambda\alpha = \alpha(1+i\lambda)$$

et

$$T(1-i) = T(1) - T(i) = \alpha - i\lambda\alpha = \alpha(1-i\lambda).$$

Le produit scalaire (usuel) de deux complexes z, w est donné par la formule :

$$(z|w) = \mathrm{Re}(z\overline{w})$$

On doit donc avoir :

$$0 = (T(1+i)|T(1-i)) = \mathrm{Re}\left(\alpha(1+i\lambda)\overline{\alpha(1-i\lambda)}\right) = \mathrm{Re}\left(|\alpha|^2(1+i\lambda)^2\right) = |\alpha|^2(1-\lambda^2),$$

donc $\lambda = 1$. ■

2 Angles entre chemins

Définition 8.12 Soit $\gamma_1, \gamma_2 : [-1,1] \to \mathcal{U}$ deux chemins tel que $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. *L'angle entre les chemins γ_1 et γ_2 au point z_0* est :

$$\angle_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2) := \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)).$$

3 Image d'un chemin par une application

Proposition 8.13 Soit $\gamma : [-1,1]$ un chemin tracé dans $\mathcal{U}$, $z_0 = \gamma(0)$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathcal{C}^1$. On a :

$$(f \circ \gamma)'(0) = Df_{z_0}\left(\gamma'(0)\right)$$

Démonstration. C'est la formule de différentiation des composées. ■

4 Angle entre deux chemins images

Proposition 8.14 Soit $\gamma_1, \gamma_2 : [-1,1]$ un chemin tracé dans $\mathcal{U}$ tel $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\angle_{f(z_0)}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \theta(Df_{z_0}(\gamma_1'(0)), Df_{z_0}(\gamma_2'(0)))$$

Démonstration. C'est la définition avec la proposition précédente. ∎

5 Application conforme

Définition 8.15 Une application différentiable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ est *conforme* lorsqu'elle conserve les angles entre les chemins. C'est-à-dire :

$$\forall z_0 \in \mathcal{U}, \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 : [-1,1] \to \mathcal{U}, \quad \text{t.q.} \quad z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) :$$

$$\angle_{f(z_0)}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2)$$

Corollaire 8.16 Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ différentiable. LASSE :

1. L'application f est conforme (sur $\mathcal{U}$).
2. Pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, l'application $\mathbb{R}$-linéaire $Df_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire et inversible.
3. L'application f est holomorphe et f' ne s'annule pas.

Démonstration. 1. ⇔ 2. La conformité implique que Df_{z_0} doit être inversible pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$. Et sous l'hypothèse d'inversibilité de Df_{z_0}, on a :

$$\angle_{z_0}(\gamma_1, \gamma_2) = \theta(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$$
$$\angle_{f(z_0)}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \theta(Df_{z_0}(\gamma_1'(0)), Df_{z_0}(\gamma_2'(0)))$$

L'équivalence est donc une conséquence du lemme 8.11.

2. ⇔ 3. Une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est inversible si et seulement si elle est non-nulle. Le reste de l'équivalence est contenue dans le Théorème 8.3. ∎

V Bonus : les fonctions harmoniques sont toutes parties réelles d'une fonction holomorphe

Théorème 8.17 Soit $\mathcal{U}$ un ouvert étoilé et $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ holomorphe. Il existe $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que $\mathrm{Re}(F) = u$.

Corollaire 8.18 Les fonctions harmoniques sont $\mathcal{C}^\infty$, vérifient la formule de la moyenne, le principe du maximum et pleins d'autres choses dérivées des propriétés des fonctions holomorphes (ouvrir un livre).

Démonstration du théorème. Soit $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Vérifions que f est holomorphe, on a :

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \underbrace{=}_{*} -\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial y}$$

* car u est harmonique.

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \underbrace{=}_{*} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial x}$$

* par le théorème de Schwarz car u est $\mathcal{C}^2$. La fonction f vérifie donc les équations de Cauchy-Riemann, elle est donc holomorphe.

Comme $\mathcal{U}$ est étoilé, il existe F une primitive de f. On vérifie ensuite que $\mathrm{Re}(F) = u$. Pour cela, on écrit $F = U + iV$, on a :

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(z) + i\frac{\partial V}{\partial x}(z) = \frac{\partial U}{\partial x}(z) - i\frac{\partial U}{\partial y}(z) = f(z) == \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

Donc :

$$\frac{\partial U - u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial U - u}{\partial y} = 0$$

Donc $U - u$ est constante. Quitte à changer F en $F + \mathrm{Cte}$, on peut supposer que $\mathrm{Re}(F) = U = u$. ■