Université de Rennes

**Fonctions holomorphes (HOLO)**

FEUILLE DE TD N°CORRIGÉ
CONTRÔLE 3

## Question de Cours

1. Principe du maximum. Soit $U$ ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si $|f|$ a un maximum local sur $U$ alors $f$ est constante.
2. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Le résidu $\mathrm{Res}_c(f)$ est la quantité
$$\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}(c,r)} f(z)dz$$
pour $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathbb{D}}(c,r) \subset \mathcal{U}$.
3. $$\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} (\overline{Reit})^n iRe^{it}dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)it}dt$$
Cette intégrale vaut $2i\pi R^2$ si $n = 1$ et 0 sinon.
4. La fonction $z \to \frac{\cos z}{(z-4i)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}(2, 1+\varepsilon)$ (car $4i$ n'est pas dans le disque. Donc (théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés par exemple) l'intégrale est nulle.

   Le théorème des résidus. L'intégrale vaut la somme des résidus en $i$ et $-i$, soit encore (calcul du résidu d'un quotient de fonctions holomorphes avec un pole simple)
$$\frac{\exp i}{2i} + \frac{\exp(-i)}{-2i} = \sin(1)$$

## Exo 1

1. $h$ est un quotient de fonctions holomorphes. Elle est donc méromorphe.
2. L'ensemble $\mathcal{Z}(g)$ des zéros de $g$ est un sous-ensemble discret de $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{Z}(g)$, on a :
$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leqslant 1.$$
En particulier, pour tout $z_0 \in \mathcal{Z}(g)$ ,dans un petit voisinage $\mathcal{V}$ de $z_0$, la fonction holomorphe $f/g$ est bornée sur $\mathcal{V} \smallsetminus \{z_0\}$. Le théorème de prolongement de Riemann montre que la $f/g$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathcal{V}$. La fonction $f/g$ se prolonge donc en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est donc entière.
3. On déduit de la question précédente que $h$ est une fonction holomorphe entière bornée sur $\mathbb{C}$. Elle est donc constante, par le théorème de Liouville. Soit $\alpha$ sa valeur. Alors $f = \alpha g$.

## Exo 2

1. La fonction $f$ est une fraction rationnelle, elle est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$. C'est une fraction irréductible donc ses pôles sont les zéros de son dénominateur. Il s'agit des $\omega^k$ avec $k = 2m+1$ pour $m = 1, \ldots, n-1$.
2. $x \to (1+x^n)^{-1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, le seul problème d'intégrabilité est en $+\infty$. Comme $n \geq 2$, on a $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^2}$ qui est continue, décroissante, et équivalente à $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ (ou la dérivée de $\arctan(x)$) de sorte qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. On intègre maintenant sur $\gamma_3^R$ . On remarque que $\omega^{2n} = 1$ de sorte que (après changement de variable $t \to R - t$, attention au signe !)
$$\int_{\gamma_3^R} f(z)dz = -\omega^2 \int_0^R \frac{1}{1+t^n}dt \to \omega^2 I$$
quand $R \to \infty$ pour les mêmes raisons qu'à la question précédente.
4. Pour tout $z \in \mathrm{Image}(\gamma_2^R)$, on a :
$$\left|\frac{1}{1+z^n}\right| \leqslant \frac{1}{R^n - 1}$$

Donc, par l'inégalité max-longueur, on a :

$$\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)dz\right| \leqslant \frac{2\pi R}{n(R^n-1)} \to 0$$

**5.** On remarque que le lacet $\Gamma^R$ entoure le pôle $\omega$ de la fonction $f$. Par ailleurs, il est facile de voir que les autres pôles de $f$ sont en dehors du domaine délimité par $\Gamma^R$.

Du coup, l'intégrale vaut $2i\pi$ fois le résidu en $\omega$. Comme $\omega$ est un pole simple de $f$ le résidu vaut $\mathrm{Res}_\omega(f) = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = -\frac{\omega}{n}$.

**6.** En prenant la limite quand $R \to \infty$ on en déduit que $I - \omega^2 I = -\frac{2i\pi\omega}{n}$ soit encore :

$$I = -\frac{2i\pi\omega}{n(1-\omega^2)} = -\frac{\pi}{n}\frac{2i\omega}{1-\omega^2} = -\frac{\pi}{n}\frac{2i}{\overline{\omega}-\omega} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}.$$

**Exo 3**

**1.** C'est un quotient de fonctions holomorphes.

**2.** Les pôles de $f'/f$ sont inclus dans les zéros de $f$. On va regarder ce qui se passe localement. Soit $z_0$ un zéro de $f$ de multiplicité (ordre) $m_0$, il existe $\varphi$ holomorphe sur $\mathscr{U}$ tel que :

$$f(z) = (z-z_0)^{m_0}\varphi(z)$$

avec $\varphi(z_0) \neq 0$. En dérivant, cette égalité, on obtient :

$$f'(z) = m_0(z-z_0)^{m_0-1}\varphi(z) + (z-z_0)^{m_0}\varphi'(z)$$

Ainsi :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

Comme $\varphi'/\varphi$ est holomorphe en $z_0$, on voit que $f'/f$ admet un pôle simple en $z_0$ dont le résidu est $m_0$.

**3.** D'après le principe des zéros isolés, dans n'importe quel compact, le nombre de zéros de $f$ est fini. Sinon, il s'accumulerait quelque part. Il n'y a donc qu'un nombre fini de zéro dans $\overline{\mathbb{D}}(\alpha, R)$, donc qu'un nombre fini dans $\mathbb{D}(\alpha, R)$.

**4.** D'après le thm des résidus, le terme de gauche est égal à la somme des résidus de $f'/f$ à l'intérieur du disque. Or chacun de ces résidus, d'après la question ci-dessus, vaut l'ordre du zéro de $f$ , c'est à dire $m_i$. D'où le résultat.

**5.** Un quotient de fonctions holomorphes avec dénominateur non nul est méromorphe. Un calcul élémentaire donne $h' = (f'g - fg')/g^2$ donc

$$\frac{h'}{h} = \frac{(f'g - fg')g}{g^2 f} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

**6.** Plein de façons de faire ! Le Log complexe est définie sur $\mathbb{D}(1,1)$ car :

**a.** la formule de DSE du Log donne un log complexe défini sur $\mathbb{D}(1,1)$.

**b.** ou car $\mathbb{D}(1,1)$ est étoilé et $z \mapsto 1/z$ est holomorphe.

ou parce que $\mathbb{D}(1,1)$ est étoilé et $z \mapsto 1/z$ est holomorphe donc par le théorème de Cauchy étoilé, l'intégrale sur tout lacet est nul. Etc ...

**7.** On part du fait que :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = \sum_i m_i - \sum_j \mu_j$$

Par ailleurs, l'inégalité $|f-g| < |g|$ implique $|h-1| < 1$ de sorte que $h$ ne peut pas s'annuler, donc $h'/h$ est holomorphe. Donc l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h'}{h}dz$ est nulle. Donc $\sum m_i = \sum \mu_j$.

Ou, l'inégalité $|f-g| < |g|$ implique $\beta = h \circ \gamma$ est un lacet tracé dans $\mathbb{D}(1,1)$ et avec $\beta = h \circ \gamma$, on a :

$$\mathrm{Ind}(\beta, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(h\circ\gamma)'(t)}{(h\circ\gamma)(t)}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{h'(\gamma(t))}{h(\gamma(t))}\gamma'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz$$

Par conséquent, la Q6 montre que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = 0$

**8.** Soit $f$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$. On note $a_d$ son coefficient dominant et on pose $g(z) = a_d z^d$. L'inégalité

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

est vérifié sur le cercle $\partial\mathbb{D}(0,R)$, pour $R$ assez grand, puisque $\frac{f-g}{g} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc le nombre de zéros comptés avec multiplicité de $f$ dans le disque $\mathbb{D}(0,R)$ est égale au nombre de zéros comptés avec multiplicité de $g$ dans le disque $\mathbb{D}(0,R)$, c'est à dire à $d \geqslant 1$.