Corrigé du CC1

1. Exo 1

1. **a.** $(j-1)(1+j+j^2)=j^3-1=0$.

b. $u_{k+3}=1+j^{k+3}+j^{2(k+3)}=1+j^kj^3+j^{2k}j^6=u_k$.

c. $u_0=3$, $u_1=0$ Q1a. $u_2=1+j^2+j^4=1+j^2+j=0$. $u_k\neq 0$ ssi $u_k=3$ ssi 3 divise k.

2.

$$\begin{aligned}e^z+e^{jz}+e^{j^2z}&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n\geqslant 0}\frac{(jz)^n}{n!}+\sum_{n\geqslant 0}\frac{(j^2z)^n}{n!}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(1+j^n+j^{2n})z^n}{n!}\\&=\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_nz^n}{n!}\end{aligned}$$

3. Les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$ s'annule infiniment souvent donc ce n'est pas une bonne idée d'utiliser le critère de d'Alembert. On peut utiliser simplement la définition du rayon de convergence et dire que pour tout $R>0$, la suite :

$$u_nR^n\frac{1}{(n)!}$$

tend vers zéro puisque $(u_n)_n$ est bornée et factoriel domine puissance. On peut aussi dire que S est la somme de trois séries entières dont le rayon de convergence est infini.

4.

$$e^z+e^{jz}+e^{j^2z}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_nz^n}{n!}=3\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$$

5.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(3n)!}&=\frac{1}{3}S(1)\\&=\frac{e^1+e^j+e^{j^2}}{3}\\&=\frac{e+e^j+e^{\bar{j}}}{3}\\&=\frac{e+e^{\mathrm{Re}(j)}(2\cos(\mathrm{Im}(j)))}{3}\\&=\frac{e+2e^{-1/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2})}{3}\end{aligned}$$

2. Exo 2

1. **a.** J'ai vu trois méthodes sur les copies. Celle qui m'est la plus naturelle d'abord. Soit $z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}$ tq $z^2\in\mathbb{R}_+$. Alors $r^2e^{2i\theta}\in\mathbb{R}_+$, soit $2\theta=0\mod 2\pi$, soit encore $\theta=0\mod\pi$, ce qui signifie que $z\in\mathbb{R}$.

Autre raisonnement élégant, moins naturel pour moi. Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+$ tq $z^2=\alpha$. L'équation $Z^2=\alpha$ est une équation du second degré, elle a deux solutions dans $\mathbb{C}$, qui sont rélles : $\pm\sqrt{\alpha}$. Donc $z\in\mathbb{R}$.

Troisième raisonnement plus pédestre. On écrit $z=a+ib$, $z^2=a^2-b^2+2iab$. Si $z^2\geq 0$, alors $2ab=0$ et $a^2\geq b^2$, ce qui implique $b=0$, donc $z\in\mathbb{R}$. Pensez tout de même à reconnaitre quand l'écriture exponentielle est plus pertinente.

b. Si $z^2-1\in\mathbb{R}_+$, alors $z^2\in[1,+\infty[$ donc $z^2\geq 0$. La question précédente implique $z\in\mathbb{R}$, et $z^2\geq 1$ équivaut alors à $|z|\geq 1$, soit encore $z\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. Donc $z\notin\mathcal{U}$. La contraposée dit que $\varphi(\mathcal{U})\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$.

2. **a.** La fonction ℓ est une détermination principale du logarithme, définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Si $z\in\mathcal{U}$, alors $z^2-1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ donc $z\to\ell(z^2-1)$ est définie et holomorphe sur $\mathcal{U}$. L'exponentielle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc par composition, f est définie et holomorphe sur $\mathcal{U}$.

b. Comme ℓ est une détermination du logarithme,

$$f^2(z)=\exp\ell(z^2-1)=z^2-1$$

Il faut savoir repérer les points cadeau, dans un sujet ... Il n'y avait pas de piège.

c. En dérivant la relation précédente, on a $2f(z)f'(z)=2z$. Comme l'exponentielle ne s'annule jamais, $f(z)\neq 0$ pour $z\in\mathcal{U}$. Donc on peut diviser et on obtient $f'(z)=\frac{z}{f(z)}$

3. **a.** $z\to z^{-1}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui envoie $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$, donc $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, et $\{z\in\mathbb{R}^*,|z|>1\}$ dans $\{z\in\mathbb{R}^*,|z|<1\}$. En particulier, cette bijection envoie $\mathcal{V}=(\mathbb{C}\setminus)\mathbb{R}\cup]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ sur $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\cup]-1,1[\setminus\{0\}\subset\mathcal{U}$.

b. si $z\in\mathcal{V}$ alors $z^{-1}\in\mathcal{U}$. Comme f est holomorphe sur $\mathcal{U}$, par composition et multiplication, on déduit que $z\to izf(z^{-1})$ est holomorphe sur $\mathcal{V}$.

c. Comme en 2b, on a $g(z)^2=-z^2f^2(z^{-1})=-z^2(\frac{1}{z^2}-1)=z^2-1$.

d. De même qu'en2c, en dérivant, on trouve $2g(z)g'(z)=2z$. Comme $z\to f(z^{-1})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$ et $z\neq 0$ sur $\mathcal{V}$, $g(z)\neq 0$ donc on peut diviser et on obtient $g'(z)=\frac{z}{g(z)}$.
Erreur de signe dans l'énoncé.