Licence 3 — Mathématiques 2023–2024

**Fonctions holomorphes (HOLO)**

Université de Rennes

CONTRÔLE N°3
1 HEURE ET DEMIE
MERCREDI 20 DÉCEMBRE

Toutes les réponses doivent être justifiées, la clarté et la concision de la rédaction font partie de l'évaluation. L'utilisation des notes de cours, TD, téléphones, tablettes, etc... est interdite.

L'épreuve est longue mais ce n'est pas très grave. En faisant bien les questions de cours, l'exercice 1 et l'exercice 2, vous aurez une bonne note. L'exercice 3 contient des questions faciles et des questions plus difficiles. On peut avoir une excellente note sans finir l'épreuve.

**7 pts**

## Questions de cours

1. Énoncer le principe du maximum. 2 pts
2. Donner la définition du résidu de la fonction $f$ au point $a$, en précisant les hypothèses sur $f$ et sur $a$. 1.5 pts
3. Calculer soigneusement $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} \overline{z}^n dz$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $R > 0$. 1.5 pts
4. Donner et justifier la valeur des intégrales suivantes : 2 pts
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(2,1)} \frac{\cos(z)}{(z-4i)^2}dz, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}(0,27)} \frac{\exp(z)}{z^2+1}dz.$$
Illustrer chaque calcul par un dessin rapide.

## Exercice 1

Soit $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deux fonctions entières telles que la fonction $g$ est non-nulle. On suppose que : **3 pts**
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |f(z)| \leqslant |g(z)|.$$
On pose $h = f/g$.

1. Justifier que $h$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. 1 pts
2. Montrer que les singularités de $h$ sont effaçables. 1 pts
3. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : 1 pts
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \alpha g(z).$$

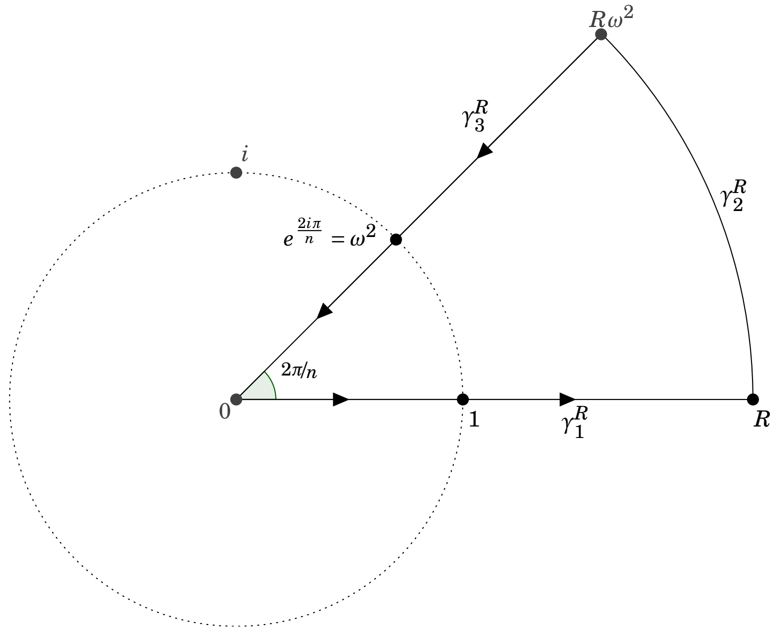


FIGURE 1. Figure de l'exercice 2, pour $n = 8$.

**Exercice 2**

**6 pts** Soit $n \geqslant 2$ et $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$. On veut calculer l'intégrale suivante :

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

On pose $\omega = e^{\frac{\pi i}{n}}$. On se donne $R > 1$ et on introduit 3 chemins $\gamma_1^R, \gamma_2^R$ et $\gamma_3^R$ présentés sur la figure . On peut les paramétrer par :

— $\gamma_1^R(t) = t, \qquad t \in [0, R]$.

— $\gamma_2^R(t) = Re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi/n]$.

— $\gamma_3^R(t) = \omega^2(R-t), \qquad t \in [0, R]$.

On note $\Gamma^R$ la concaténation des chemins $\gamma_1^R, \gamma_2^R$ et $\gamma_3^R$.

1 pts **1.** Justifier que $f$ est méromorphe, donner ses pôles, les placer sur le dessin.

1 pts **2.** Justifier l'intégrabilité de $x \mapsto (1+x^n)^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I$.

1 pts **3.** Trouver la limite de $\int_{\gamma_3^R} f(z)dz$ quand $R \to +\infty$.

1 pts **4.** Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_2^R} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1 pts **5.** Calculer pour tout $R > 1$, la valeur de $\displaystyle\int_{\Gamma^R} f(z)dz$.

1 pts **6.** En déduire que $I = \dfrac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

**Exercice 3**

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f, g$ deux fonctions holomorphes non-constantes sur $\mathscr{U}$. **5+3 pts**

**0.** Faire des dessins, tout au long de l'exercice.

**1.** Justifier que la fonction $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur $\mathscr{U}$. 1 pts

**2.** * Déterminer les pôles de $\frac{f'}{f}$, montrer qu'ils sont simples et calculer les résidus de $\frac{f'}{f}$ en ses pôles. 1 pts

*Soit $\overline{\mathbb{D}}(\alpha, R)$ un disque fermé inclus dans $\mathscr{U}$. On note $\gamma$ un lacet qui parcourt le cercle $\partial\mathbb{D}(\alpha, R)$ dans le sens trigonométrique. On suppose que $f$ n'admet pas de zéro sur $\partial\mathbb{D}(\alpha, R)$.*

**3.** Montrer que l'ensemble des zéros de $f$ inclus dans $\mathbb{D}(\alpha, R)$ est fini. 1 pts

*On note $z_1, \ldots, z_n$ les zéros de $f$ inclus dans $\mathbb{D}(\alpha, R)$ et on note $m_1, \ldots, m_n$ leurs multiplicités (aussi appelés leurs ordres).*

**4.** Montrer que : 1 pts

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

**5.** On pose $h = \frac{f}{g}$. Après, avoir vérifié la méromorphie de $h$, montrer que : 1 pts

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

**6.** Soit $\beta$ un lacet tracé dans $\mathbb{D}(1,1)$. Montrer que : 1 pts

$$\mathrm{Ind}(\beta, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{dz}{z} = 0.$$

*On suppose que :*

$$\forall z \in \mathrm{Image}(\gamma), \qquad |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

*On note $w_1, \ldots, w_k$ les zéros de $g$ dans $\mathbb{D}(\alpha, R)$ et on note $\mu_1, \ldots, \mu_k$ leurs multiplicités.*

**7.** ** Montrer que : 1 pts

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_j.$$

**8.** ** Écrire une nouvelle preuve du Théorème de d'Alembert-Gauss. 1 pts