Licence 3 — Mathématiques 2023–2024

Fonctions holomorphes (HOLO)

Université de Rennes

CONTRÔLE N°1
1 HEURE
VENDREDI 19 NOVEMBRE

Toutes les réponses doivent être justifiées, la clarté et la concision de la rédaction font partie de l'évaluation. L'utilisation des notes de cours, TD, téléphones, tablettes, etc... est interdite.

Les questions de cours, les exercices 1, 2 et 3 sont sur 19 points. L'exercice 4 est sur 2 points, dont un point bonus, il est difficile. Ne vous engagez pas dans l'exercice 4 tant que vous n'avez pas relu vos réponses aux questions de cours et aux exercices 1, 2 et 3.

Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Cauchy pour un ouvert étoilé. Illustrer par un dessin rapide.

2. Calculer soigneusement $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}(0,R)} z^n dz$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $R > 0$.

3. Donner et justifier la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{\partial\mathbb{D}(2i,1)} \frac{\sin(z)}{(z-5)^3} dz, \qquad \int_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \frac{\sin(z)}{z-i} dz.$$

Illustrer chaque calcul par un dessin rapide.

Exercice 1

1. Tracer rapidement la parabole d'équation $y = x^2$ pour $x \in [-2, 2]$.

On note γ le chemin qui parcourt la parabole d'équation $y = x^2$ entre le point $(1,1)$ d'affixe $1+i$ et le point $(2,4)$ d'affixe $2+4i$.

2. Donner un paramétrage $t \mapsto \gamma(t)$ de γ.

3. Calculer l'intégrale :

$$\int_\gamma \bar{z} dz$$

Exercice 2

1. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\sin(z)| \leqslant e^{|\mathrm{Im}(z)|}.$$

2. Montrer que :

$$\left| \int_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \frac{\sin(z)}{z^2+1} dz \right| \leqslant \frac{3\pi e^3}{4}.$$

Exercice 3

On note $\mathbb{D}$ le disque unité et $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On considère la transformation de Möebius donnée par $h(z) = \dfrac{-z+1}{z+1}$.

1. Montrer que :

$$\mathrm{Re}\big(h(z)\big) = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2}$$

2. En déduire que $h(\mathbb{D}) \subset \Pi^+$.
3. Calculer l'inverse de la transformation de Möbius h.
4. Montrer que $h^{-1}(\Pi^+) \subset \mathbb{D}$.
5. Montrer que h est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ vers Π^+.

Exercice 4 ☆☆

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe tel que :

$$\forall z \in \Omega, \qquad e^{F(z)} = f(z).$$

Si $a \neq b \in \mathbb{C}$, on note (ab) le droite passant par a et b.

2. Soit $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}^*$ et $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_k$, où D_k est la composante connexe de $(0a_k) \setminus \{a_k\}$ qui ne contient pas 0. Montrer qu'il existe $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que :

$$\forall z \in \mathcal{U}, \qquad g^2(z) = (z-a_1)\cdots(z-a_n).$$