Licence 3 — Mathématiques 2023–2024

Fonctions holomorphes (HOLO)

Université de Rennes

CONTRÔLE N°1
1 HEURE
VENDREDI 13 OCTOBRE

Toutes les réponses doivent être justifiées, la clarté et la concision de la rédaction font partie de l'évaluation. L'utilisation des notes de cours, TD, téléphones, tablettes, etc... est interdite.

Questions de cours

1. Soit $f_n : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ une fonction. Rappeler la définition de la *convergence uniforme sur les compacts* de $\mathscr{U}$ de la suite $(f_n)_n$ vers f.
2. **a.** Donner la définition de la fonction sinus hyperbolique sinh à l'aide la fonction exponentielle.

   b. Décrire simplement et proprement l'ensemble des zéros sur $\mathbb{C}$ de sinh.
3. La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2\overline{z}$ est-elle holomorphe ?
4. Donner les rayons de convergence des séries entières :
$$\sum \frac{10^n}{(n!)^2} z^n \qquad \sum 3^n n^2 u_n\, z^n \qquad \sum u_n z^n$$
   où $(u_n)_n$ est une suite bornée possédant une infinité de termes dans l'intervalle $[1,2]$.
5. Énoncer le principe des zéros isolés pour les séries entières.

Exercice 1

On considère la série entière suivante :
$$S(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$
On note $j = e^{2i\pi/3}$ et considère la suite de terme général $u_k = 1 + j^k + j^{2k}$.

1. **a.** Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

   b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+3} = u_k$.

   c. En déduire la valeur de $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire le développement en série entière de $e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}$.
3. Calculer le rayon de convergence de la série entière S.
4. Calculer $S(z)$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!} = \frac{e + 2e^{-1/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2})}{3}$.

Exercice 2

Notons $\mathscr{U}$ le plan complexe privé des deux demi-droites $[1,+\infty[$ et $]-\infty,-1]$ de l'axe réel.

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 - 1$

- **a.** Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que si $z^2 \in \mathbb{R}_+$ alors $z \in \mathbb{R}$.
- **b.** Montrer que l'image de $\mathscr{U}$ par la fonction $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 - 1$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

2. On note $\ell_{\emptyset}$ la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ par :

$$\ell_{\emptyset}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{\emptyset}(z)$$

où $\arg_{\emptyset}(z)$ est l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

- **a.** Montrer que la fonction $f : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{1/2 \ell_{\emptyset}(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathscr{U}$.
- **b.** Calculer son carré.
- **c.** Montrer que $f'(z) = \dfrac{z}{f(z)}$.

3. Notons $\mathscr{V}$ le plan complexe privé du segment $[-1, 1]$.

- **a.** Vérifier que pour $z \in \mathscr{V}$, on a $z^{-1} \in \mathscr{U}$.

  On définit $g : \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ en posant $g(z) = izf(z^{-1})$.
- **b.** Montrer que g est bien définie et holomorphe sur $\mathscr{V}$.
- **c.** Calculer son carré.
- **d.** Montrer que $g'(z) = -\dfrac{z}{g(z)}$