Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

2022-2023
Licence 3

Fonctions Holomorphes
Contrôle du 17 mars 8h30

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. La clarté de la redaction constitue une part essentielle de l'evaluation.

NOM : **Prénom :**

Groupe TD : **GR1** **GR2** **GR3** **MAG**

EXERCICE 1 (6 pts) Questions de cours.

(1) Rappeler l'énoncé du théorème de Majoration Standard. Démontrer le théorème.

(2) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme. Calculer $Log(3i-3)$.

(3) Trouver toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation

$$e^z + 1 = 0.$$

EXERCICE 2 (5 pts)

Soit $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto (\overline{z})^n$. Soit $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = re^{it}$. Calculer

$$\int_{\gamma_r} f_n(z)dz$$

pour toutes les valeurs de r et n.

EXERCICE 3 (8 pts) Justifier soigneusement vos réponses. Vous pouvez utiliser les résultats vus en cours et en TD.

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Soit $a_0 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

On considère la série entière

$$\sum a_n z^n.$$

(1) Trouver le rayon de convergence R de la série. Soit $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

(2) Calculer f' sous forme d'une série entière dont on précisera le rayon de convergence R'.

(3) Montrer que on a $f'(z)(1+z) = \alpha f(z)$ pour $|z| < \min\{R, R'\}$.

(4) Montrer que $f(z) = (1+z)^\alpha$ pour $|z| < \min\{R, R'\}$.

EXERCICE 4 (3 pts) Justifier soigneusement vos réponses. Vous pouvez utiliser les résultats vus en cours et en TD.

On note

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| < 1\} \text{ et } Q = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0, Re(z) > 0\}$$

Trouver un bilolomorphisme $f : Q \to \Delta$.