# Feuille de TD n° 1
## Nombres Complexes

### Forme algébrique, trigonométrique, et exponentielle

**Exercice 1.** Donner la forme algébrique des complexes suivants

$$\text{(a)}\ z_1 = (2+i)^4; \qquad \text{(b)}\ z_2 = \frac{1-3i}{1-i} - \frac{5-5i}{1+2i}$$

**Exercice 2.** Donner la forme exponentielle de

$$\text{(a)}\ z = 1 - i\sqrt{3}; \quad \text{(b)}\ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{(c)}\ z = -\sqrt{3} + 3i.$$

**Exercice 3.** (a) Donner le module et un argument de $1+i$.
(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$.
(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$.
(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$ ?

**Exercice 4.** Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

$$\text{(a)}\ (4+4i)^2; \qquad \text{(b)}\ (4+4i)(1-i\sqrt{3}); \qquad \text{(c)}\ \frac{2}{1-i}; \qquad \text{(d)}\ \frac{(1+i)^{19}}{(-1+i)^{11}}$$

**Exercice 5.** Nous connaissons déjà quelques valeurs remarquables de cos et sin, notamment

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}$$

Dans cet exercice on va allonger cette liste.
(a) Déterminer la forme exponentielle de $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.
(b) Déterminer la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})}$.
(c) Déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

### Représentation graphique

**Exercice 6.** Représenter dans le plan complexe les points $M_k$, d'affixe $z_k$ tel que
(a) $z_1 = -2$, (b) $z_2 = 5i$, (c) $z_3 = 2+2i$, (d) $z_4 = 2-2i$, (e) $z_5 = -2-2i$,

et en déduire la forme trigonométrique/exponentielle de $z_k$, pour tout $k = 1, \dots, 5$.

**Exercice 7.** Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points $M$, d'affixe $z$ tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

(e) $|z - (3+i)| = 2$ (f) $|z - (1+i)| = |z - 2i|$

**Exercice 8.** Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $-z$, $iz$, $\frac{1}{z}$.
(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe $z$, $\bar{z}$, $-z$, $iz$ et $\frac{1}{z}$.

**Exercice 9.** Quel est l'ensemble des complexes $z$ tels que $z$, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont le même module ?

**Exercice 10.** Décrire avec des mots français les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ suivantes.

(a) $f(z) = \overline{z}$ (b) $f(z) = z + 2 + i$ (c) $f(z) = 2z$ (d) $f(z) = iz$ (e) $f(z) = (1+i)z$

## Linéarisation

**Exercice 11.** Linéariser :

(a) $\sin^3(x)$; (b) $\cos^2(3x) \cdot \sin(5x)$.

## Racines carrées

**Exercice 12.** Déterminer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :
(a) sous forme algébrique ;
(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de $z$.

**Exercice 13.** Déterminer les racines carrées de

(a) $-11 + 60i$ (b) $1 + 4\sqrt{5}i$

;

## Équations du second degré

**Exercice 14.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ :
(a) $(z - 2 - i)(z - 3 + i) = 0$ ; (b) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ ;
(c) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$ ; (d) $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i = 0$ (Rappel : $\sqrt{625} = 25$) ;

**Calcul de racines n-ièmes de l'unité**

**Exercice 15.** Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(a) Écrire les racines 3-èmes de l'unité à l'aide de $\omega_3$ et les placer sur un dessin.

(b) Écrire les racines 4-èmes de l'unité à l'aide de $\omega_4$ et les placer sur un dessin.

**Exercice 16.** Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(a) Lister les racines de l'unité à l'aide de $\omega$.

(b) Calculer :

$$(1-\omega)\sum_{k=1}^{n}\omega^k.$$

(c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\omega^k = 0$.

**Calcul de racines n-ièmes**

**Exercice 17.** Déterminer des racines sous forme exponentielle.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ et représentez-les dans le plan complexe.

**Exercice 18.** (Détermination des racines $n$-ièmes de $-1$.)
Soit $n \geqslant 2$, on note $\alpha = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Soit $z$ tel que $z^n = -1$.

(a) Montrer que $z$ est une racine $2n$-ième de l'unité qui n'est pas une racine $n$-ièmes.

(b) Lister les racines $n$-ièmes de $-1$ à l'aide $\alpha$ et les placer sur un dessin pour $n = 2,3,4,\ldots$

**Applications en électronique**

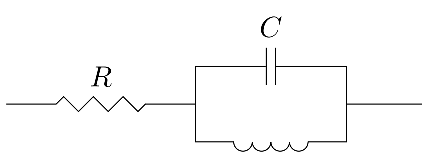

Figure 1

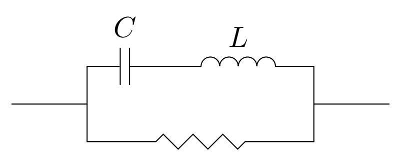

Figure 2

**Exercice 19.** L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoidal – c.à.d., à un courant de la forme $I(t) = \sin(2\pi\omega t)$, où $\omega$ s'appelle la *pulsation*, et $2\pi\omega$ s'appelle la *fréquence*. L'impédance est un nombre complexe. Nous considérons le circuit de la Figure 1 ci-dessus, alimenté par un courant sinusoïdal. Ici $R$ désigne une résistance, $C$ un condensateur et $L$ une bobine.

- Si deux éléments d'un circuit sont d'impédance $Z_A$ et $Z_B$, et je veux calculer l'impédance totale $Z$ du circuit. Si les deux éléments sont en série, alors les impédances complexes s'additionnent
$$Z = Z_A + Z_B.$$
En revanche, s'ils sont en parallèle, alors ce sont les *admittances* qui s'additionnent : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$, donc
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}}.$$
- L'impédance d'un condensateur est donnée par $Z_C = \frac{1}{iC\omega}$, où $C$ est la capacité (en Farad) du condensateur.
- L'impédance d'une bobine est donnée par $Z_L = iL\omega$, où $L$ est l'inductance (en Henry) de la bobine.
- L'impédance d'une résistance est donnée par $Z_R = R$ où $R$ est la résistance (en Ohm).

(a) Montrer que l'impédance complexe du circuit ci-dessus est de $Z_{circuit} = R + i\frac{L\omega}{1-LC\omega^2}$

(b) Pour quelle pulsation $\omega$ le courant $I$ est-il nul ? (Intuitivement, ceci arrive quand $|Z_{circuit}|$ est "infiniment grand".)

**Exercice 20.** Regardons le circuit de la Figure 2, alimenté par un courant sinusoidal.

(a) Montrer que l'impédance complexe de ce circuit est de $\frac{R(LC\omega^2-1)}{(LC\omega^2-1)-iRC\omega}$.

(b) Pour quelle pulsation $\omega$ l'impédance est-elle nulle ?

## COMPLÉMENTS

### Forme algébrique et trigonométrique

**Exercice 21.** Pour tout complexe $z$, on pose
$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$
Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

### Forme exponentielle d'un nombre complexe

**Exercice 22.** (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$ et de $-1+i$.

(b) Déteminer la forme exponentielle de
$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de $z$.

**Exercice 23.** Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

### Représentation graphique

**Exercice 24.** Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que :

(a) $-1 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant 2$. (b) $\dfrac{1}{2} \leqslant |z-i| \leqslant 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

### Linéarisation

**Exercice 25.** Linériser $\cos^2(x) \cdot \sin^4(x)$.

### Équations du second degré

**Exercice 26.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ :
(a) $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$ (b) $z^4 + z^2 - 20 = 0$ (c) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

### Calcul de racines n-ièmes

**Exercice 27.** Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

**Exercice 28.** Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $-i$

### Nombres complexes et géométrie

**Exercice 29.** Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes $z$ tels que :

1) $M_1$, $M_2$, $M_3$ sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en $M_1$
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

**Exercice 30.** Quel est l'ensemble des complexes $z$ tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?