Université de Rennes Année 2023-2024
ISTIC Analyse 1 (Licence 1)

Chapitre 5 : Intégration

Intégrale et aire

Exercice 5.1. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x-2|\, dx$.

Tableau de primitives

Exercice 5.2. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes.

(a) $3x^2+4x-2$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{5x}}$ (d) $\dfrac{1}{\sqrt{5x+3}}$ (e) $\sqrt{x}$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (g) e^{5x+3} (h) 2^{-x} (i) $(e^x-3x^2)\cdot\cos(e^x-x^3)$

Linéarisation

Exercice 5.3. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\left(x^3-2\right)^2$ (b) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)^2$ (c) $\cos^2(x)$ (d) $\sin(2x)\cdot\sin(5x)$

Intégrales impropres

Exercice 5.4. Dans certains cas, on peut définir une intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ même si a et b n'appartiennent pas au domaine de définition de f ! Dans tous les cas suivants, décider si l'expression a un sens, et si oui, déterminer sa valeur numérique :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Intégration par parties

Exercice 5.5. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $x \cdot \cos(x)$ (b) $x \cdot \ln(x)$ (c) $x^2 \cdot \cos(3x)$ (d) $\arctan(x)$ (e) $e^x \sin(x)$

Exercice 5.6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot e^x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^2 \, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) \, dx$ (intégrale impropre)

Changement de variables

Exercice 5.7. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $3x^2(x^3+4)^{20}$ (b) $\dfrac{x^2}{2x^3+5}$ (c) $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$

(d) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$ (e) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ (f) $\dfrac{2x}{1+x^4}$

Exercice 5.8. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_3^6 x(x^2-9)^{\frac{4}{3}} \, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^7(x) \, dx$ (c) $\displaystyle\int_2^3 x \cdot \exp(x^2-4) \, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sqrt{\sin(x)} \, \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^2+9} \, \mathrm{d}x$

Exercice 5.9. À l'aide d'un changement de variable calculer une primitive des fonctions suivantes.

(a) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, en posant $u = \sqrt{1+x}$;

(b) $x \mapsto \dfrac{1}{x + x(\ln x)^2}$, en posant $u = \ln x$.

Fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples

Exercice 5.10. Décomposer sur $\mathbb{R}$ en éléments simples :

(a) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ (b) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$ (c) $\dfrac{2x^3-9x^2+10x-5}{x^2-5x+6}$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.11. (Comparer avec l'exercice 2.14) En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ (b) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$; (c) $\dfrac{2x^3-9x^2+10x-5}{x^2-5x+6}$;

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 5.12. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ (Indication : $u = e^x$.) (b) $\dfrac{1}{\tan(x)(\sin(x)+1)}$ (Indication : $u = \sin(x)$.)

(c) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}$ (Indication : $u = e^x$.)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 5.13. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot \arctan(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties, et utiliser $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arccos(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties.)

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\cos^3(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 5.14. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(2x)\cos(3x)$ (b) $\dfrac{\ln^3 x}{x}$ (c) $\ln(x^2-1)$ (Indication : $v' = 1$.)

(d) $\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}$ (e) $\dfrac{x+1}{e^x}$ (f) $x^2\sqrt{1+x^3}$

COMPLÉMENTS

Intégrale et aire

Exercice 5.15. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (3x-2)\ dx$; (b) $\displaystyle\int_{-4}^{3} |(|x-2|-|x+2|)|\ dx$.

Exercice 5.16. Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sinh(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\ dx$

Linéarisation

Exercice 5.17. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\left(\sqrt{x}+x^2\right)^3$ (b) $\sin(x)\cos(x)$ (c) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2.$ (d) $\sinh^2(x)$

Intégration par parties

Exercice 5.18. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :
(a) $x^2\cdot\cos(x)$ (b) $x\cdot\cos^2(x)$ (c) $(x+1)\cdot e^x\cdot\ln(x)$ (d) $\ln(x)$ (e) $e^{ax}\cos(bx)$

Exercice 5.19. Soit

$$I_n := \int_1^e x\cdot(\ln(x))^n\ dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Puis calculer $\displaystyle\int_1^e x\cdot(\ln(x))^4\ dx.$

Exercice 5.20. Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx.$$

En écrivant $\cos^n(x)=\cos(x)\cdot\cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x)\ dx$.

Changement de variables

Exercice 5.21. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $(x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{4+x^6}$ (c) $2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}$

Exercice 5.22. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $\sqrt{2-x^2}$ (b) $\sqrt{1+2x-x^2}$ (c) $\sqrt{x^2-4}$

(d) $\sqrt{x^2+4x-5}$ (e) $\sqrt{2x^2+32}$ (f) $\sqrt{2x^2-4x+4}$

Exercice 5.23. Calculer
$$\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1+e^x}\ dx$$

Exercice 5.24. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$ (b) $\dfrac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ (g) $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (h) $\sqrt{4x^2-8x+24}$

Exercice 5.25. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)+\sin^2(x)}}$ (b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.26. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(a) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$ (b) $\dfrac{3x-1}{x^2+4x+4}$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(c) $\dfrac{1}{e^x+2e^{-x}}$ (Indication : $u=e^x$.) (d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (Indication : $u=1+\sqrt{x}$.)

(e) $\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{(2+\sin x)^2}$ (Indication : $u=2+\sin x$.) (f) $\dfrac{1}{e^{2x}-e^x-2}$.