Chapitre 3 : Limites, dérivées, étude locale de fonctions, continuité

Limite

Exercice 3.1. Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\text{(a)}\ \exp\left(\frac{1}{x}\right),\quad x=0 \qquad \text{(b)}\ \exp\left(\frac{|x|}{x}\right),\quad x=0 \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1},\quad x=1.$$

Exercice 3.2. Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cos(x), \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}|x-1|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right),$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty}\exp(\sin(x)-x), \quad \text{(e)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{2x^2}, \quad \text{(f)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos(x)}{x-1}.$$

Exercice 3.3. Évaluez les limites suivantes (sans utiliser la règle de l'Hôpital)

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2},$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2\ln x}, \qquad \text{(e)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2}, \qquad \text{(f)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4},$$

$$\text{(g)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}+\sin(x) \qquad \text{(h)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x+2} \qquad \text{(i)}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\ln(x)$$

Exercice 3.4. Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes :

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})}, \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin(x)}, \quad \text{(d)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}.$$

Exercice 3.5. Donner les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}x\ln(x), \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{4x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^3+40}.$$

Définition de la dérivée

Exercice 3.6. Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$.

Exercice 3.7. Utiliser la définition des dérivées pour calculer les limites suivantes :

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\ , \qquad (b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}\ , \qquad (c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\ ,$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x-1}\ , \qquad (e)\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\ , \qquad (f)\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$$

Opérations algébriques de la dérivée

Exercice 3.8. Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$\text{(a) } 8x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{(b) } \mathrm{e}^x \sin(x) \qquad \text{(c) } \frac{1-4x}{x^{2/3}} \qquad \text{(d) } 3^x \sin(x)$$

(i) donner un sous-ensemble du domaine de définition où la fonction en question est dérivable et
(ii) utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée.

Exercice 3.9. En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{x+\mathrm{e}^x}$ (c) $\cos(x \cdot \ln(x))$ (d) 2^{-x}

(e) $\ln(\ln(\ln(x)))$ (f) $\ln(x \cdot \sin(x))$ (g) $2^{x \cdot \sin(x)}$ (h) $xe^{\frac{1}{x}}$

Règle de l'Hôpital

Exercice 3.10. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{x^2}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$, (i) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x+2}{x^2\ln x}$,

Fonctions continues

Exercice 3.11. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :

1. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
3. L'image par une fonction continue d'une partie bornée est une partie bornée.

Exercice 3.12. Montrer que l'équation $x^3+x^2-4x+1=0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$. En utilisant un raisonnement par dichotomie, donner un encadrement d'amplitude inférieur à 10^{-1} de chacune de ces racines.

Exercice 3.13. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.