UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°7
THÉORIE DES RÉSIDUS

On notera $\mathbb{H}$ le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \ Im(z) > 0\}$. Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, on notera P_f le lieu de ses pôles.

1. SINGULARITÉS ISOLÉES

Exercice 1 (Exemples de singularités isolées)**.**

Décrire le type singularité (apparente, pôle ou essentielle) des applications suivantes

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}\ ,\quad g(z) = \frac{z}{e^z - 1}\quad \text{ et }\ h(z) = e^{1/z}.$$

Exercice 2 (Théorème d'identité)**.**

(1) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions méromorphes sur D. Montrer qu'on a équivalence entre
   (a) $f = g$
   (b) L'ensemble $\{z \in D \setminus (P_f \cup P_g),\ \ f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans D.

(2) Peut-on construire une application méromorphe sur C^* non nulle mais nulle en tous les réels de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 (Fonctions rationnelles)**.**

Soit f une application méromorphe sur $\mathbb{C}$ et n un entier naturel et r un nombre réel strictement positif tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus (P_f \cup \Delta_r),\ \ |f(z)| \leq |z|^n.$$

Montrer que f est une application rationnelle.

2. SÉRIE DE LAURENT

Exercice 4 (Série de Laurent)**.**

Calculer la série de Laurent de $\frac{1}{z^2+z^3}$ au voisinage de l'origine.

3. RÉSIDUS

Exercice 5 (Propriété)**.**

Soient deux fonctions g et h holomorphes sur un ouvert connexe du plan complexe, a un pôle de g/h tel que $h(a) = 0$ et $h'(a)$ soit non nul. Montrer que :

$$Res(a, \frac{g}{h}) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Exercice 6 (Calcul de résidus)**.**

(1) L'application $\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ est-elle méromorphe ? Si oui, déterminer ses résidus.

(2) Calculer les résidus en tous les pôles de

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}\ \text{ et }\ g(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}.$$

Exercice 7 (Calcul d'intégrales)**.**

1. Montrer que
$$\int_{\partial\Delta_2} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z} = 0.$$
2. Calculer les intégrales suivantes, où les chemins fermés simples γ sons parcourus dans le sens direct.
   i.
   $$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz \text{ où } \gamma = \partial\Delta_{1/2}(2) \text{ est le cercle centré en } 2 \text{ de rayon } 1/2.$$
   ii.
   $$\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2(z-9)^2} dz \text{ où } \gamma = \partial\Delta \text{ est le cercle centré en l'origine de rayon } 1.$$

Exercice 8 (Somme de résidus)**.**

Soit f une fonction rationnelle, quotient d'un polynôme P par un polynôme Q. On suppose que $deg(P) + 2 < deg(Q)$. Montrer que
$$\sum_{c \in \mathbb{C}} Res(c, f) = 0.$$

4. Calcul à l'aide du théorème des résidus

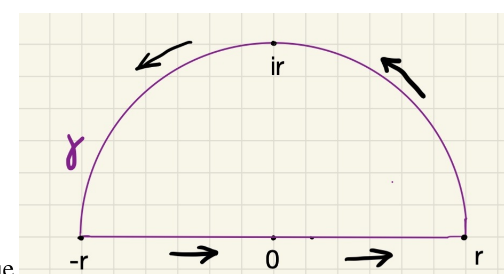
Exercice 9 (Calcul d'intégrales trigonométriques)**.**

1. Soit a un nombre complexe de module différent de 1. Montrer que
$$i \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$
2. Déterminer les résidus des pôles de $\frac{1}{(z-a)(1-az)}$ contenus dans le disque unité ouvert.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$.

Exercice 10 (Calcul d'intégrales rationnelles)**.**

On considère la fonction méromorphe $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $zf(z)$ a une limite quand $|z|$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ converge.
3. Déterminer les pôles de f contenus dans le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ Im(z) > 0\}$ et leurs résidus.



4. En intégrant sur le chemin fermé γ défini par le dessin montrer que
$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\partial(\Delta_r \cap \mathbb{H})} f(z)dz = 2i\pi \sum_{c \in \mathbb{H}} Res(c, f).$$
5. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. Nombre de zéros

Exercice 11 (Contraintes)**.**

1. Montrer que le polynôme $f(z) = 3 + 7z + 2z^4$ a, comme le polynôme $3 + 7z$, exactement un zéro dans Δ.
2. Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $z^5 + z^3/3 + z^2/4 + 1/3$ dans Δ.
3. Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $z^5 + z^3/3 + z^2/4 + 1/3$ dans $\Delta_{1/2}$.
4. Déterminer le nombre de zéros du polynôme $z^4 - 5z - 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.