UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°5
INTÉGRATION SUR LES CHEMINS DU PLAN COMPLEXE

On rappelle que $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, Im(z) = 0 \text{ et } Re(z) \leqslant 0\}$ et que $\log$ désignera la branche principale du logarithme définie sur $\mathbb{C}^-$ à valeurs dans $B := \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\pi < Im(z) < \pi\}$. On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. INTÉGRALES SUR LES CHEMINS DU PLAN COMPLEXE

Exercice 1 (Calculs)**.**

1. On considère le bord $\mathcal{C}$ du triangle de sommet : $z = 0$, $z = 1$, et $z = i$, orienté dans le sens direct. Calculer les intégrales $\int_{\mathcal{C}} x dz$ et $\int_{\mathcal{C}} z e^z dz$.
2. Soit le cercle unité $\mathcal{C}$ parcouru dans le sens direct. Pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, calculer l'intégrale $\int\limits_{\mathcal{C}} z^n dz$. Expliquer le cas particulier où $n = -1$.
3. Montrer $\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} \right| \leqslant \frac{\pi}{3}$, lorsque $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer $\left| \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz \right| \leqslant \pi e$, lorsque $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Exercice 2 (Intégrale elliptique)**.**

Soient deux réels strictement positifs a et b, on pose $\gamma = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ et en déduire : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}$.

Exercice 3 (Existence de primitive)**.**

Soit $D := \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ et $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$.

1. D est-il un ouvert étoilé ?
2. La fonction $F : z \mapsto \log(1 - \frac{1}{z})$ est-elle bien définie et continue sur D ?
3. Montrer que pour tout chemin orienté Γ de D, $\int_\Gamma f(\zeta) d\zeta = 0$.

2. THÉORIE DE CAUCHY

Exercice 4 (Lemme de Goursat)**.**

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit T un triangle (plein) inclus dans le domaine D. On notera p son périmètre. Le but de l'exercice est de montrer que

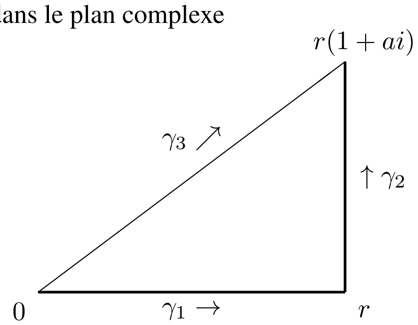
$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

1. En considérant les quatre triangles obtenus en traçant les segments entre les milieux des côtés de T, montrer que pour l'un de ces triangles noté T_1,
$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leqslant 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z) dz \right|.$$
2. En itérant cette construction, montrer que pour tout n, il existe un triangle $T_n \subset T_{n-1}$ de périmètre $\frac{p}{2^n}$ tel que
$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leqslant 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z) dz \right|.$$
3. Montrer que l'intersection des T_n est un point c de D.
4. Montrer qu'il existe une fonction continue h sur D nulle en c telle que pour tout $z \in D$,
$$f(z) = f(c) + (z - c)f'(c) + (z - c)h(z).$$
5. Calculer $\int_{\partial T_n} f(c) dz$ et $\int_{\partial T_n} (z - c)f'(c) dz$.
6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geqslant N$,
$$\left| \int_{\partial T_n} (z - c)h(z) dz \right| \leqslant \left(\frac{p}{2^n} \right)^2 \varepsilon.$$

7. Conclure.
8. Montrer en choisissant un découpage de T avec un petit triangle autour de a que si $f : D \to \mathbb{C}$ est une application continue et holomorphe sur $D - \{a\}$, alors pour tout triangle de sommet a dans D, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Exercice 5 (Calcul d'intégrales à l'aide d'un chemin fermé)**.**

Soit a un nombre réel tel que $|a| \leqslant 1$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-z^2}$ et pour tout réel strictement positif r, les chemins suivants dans le plan complexe



1. Calculer $\int_{\gamma_1} f(z)dz$.
2. Montrer que $|\int_{\gamma_2} f(z)dz| \leqslant \frac{1}{r}$.
3. En déduire
$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+ai)^2t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{1+ia}.$$
4. En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

Exercice 6 (Calcul d'intégrales par la formule intégrale de Cauchy)**.**

Calculer
$$\int_{\partial\Delta_2} \frac{e^z}{(z-3)^2}dz\ ,\ \int_{\partial\Delta_2} \frac{e^z}{(z+1)}dz \text{ et } \int_{\partial\Delta_2} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}dz.$$

Exercice 7 (Calcul d'intégrales)**.**

On paramètre le cercle C_r de centre 0 et de rayon $r > 0$ par $t \mapsto \xi(t)$, en définissant pour $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t)$ comme le point d'intersection différent de $-r$ de la droite d'équation $y = t(x+r)$ avec le cercle C_r.

1. Montrer que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.
2. Vérifier que ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.
3. En déduire que
$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$
4. En déduire que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

3. Applications

Exercice 8 (Calcul d'intégrales et théorème de Liouville)**.**

1. Soit $r > 0$ et D un voisinage ouvert de $\overline{\Delta_r}$. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit a et b deux points distincts dans Δ_r. Calculer
$$\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-b)}d\zeta.$$
2. En déduire le théorème de Liouville : Toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Exercice 9.

1. Déterminer toutes les fonctions holomorphes définies sur le plan complexe tout entier vérifiant : $|f(z)| \geqslant 1$.
2. On considère une fonction f holomorphe dans le disque unité, vérifiant $|f(z)| \leqslant 1$, que peut on dire de $|f'(0)|$?
3. Soit n_0 un nombre entier naturel et f une fonction holomorphe définie sur le plan complexe tout entier vérifiant $|f(z)| \leqslant |z|^{n_0}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n_0.
4. Soient Ω un ouvert connexe et D une droite, f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur la restriction $\Omega \setminus D$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω tout entier.