



## Fonctions holomorphes (HOLO)

### FEUILLE DE TD N°4 LOGARITHMES ET INTÉGRATION SUR LES CHEMINS DU PLAN COMPLEXE

On rappelle que  $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  et que  $\log$  désignera la branche principale du logarithme définie sur  $\mathbb{C}^-$  à valeurs dans

$$B := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$

#### 1. APPLICATIONS LOGARITHMES

**Exercice 1** (Une autre application logarithme ?).

On considère l'application

$$L : \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\} \\ z = x + iy \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \longmapsto \frac{1}{2} \log_{\mathbb{R}}(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{array}$$

1. Montrer que  $L$  est holomorphe.
2. L'application  $L$  coïncide-t-elle avec la branche principale  $\log$  du logarithme sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  ?
3. L'application  $L$  est-elle un logarithme sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$  ?

**Exercice 2** (Propriétés de la branche principale du logarithme).

1. Pour quelles valeurs de  $z \in \mathbb{C}$  le nombre complexe  $\exp(z)$  est-il dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^-$  ?
2. Vérifier que  $\exp : B \rightarrow \mathbb{C}^-$  et  $\log : \mathbb{C}^- \rightarrow B$  sont deux biholomorphismes réciproques.
3. A-t-on pour tous  $z, w \in \mathbb{C}^-$ ,

$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

4. A-t-on pour tous  $z, w \in \mathbb{C}$  tels que  $\operatorname{Re}(z) > 0$  et  $\operatorname{Re}(w) > 0$ ,

$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

**Exercice 3** (La fonction zeta de Riemann).

On rappelle que pour tout entier  $n \geq 1$ , et tout nombre complexe  $z$ ,  $n^z$  désigne  $p_z(n) = \exp(z \log n)$ .

1. Déterminer le module de  $n^z$ .
2. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$  converge normalement sur l'ouvert  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$ .

## 2. INTÉGRALES SUR LES CHEMINS DU PLAN COMPLEXE

**Exercice 4** (Pour apprendre le cours).

1. Soit  $I = [a, b]$  ( $a < b$ ) un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue. Montrer que

$$\left| \int_a^b \phi \right| \leq \int_a^b |\phi|.$$

On pourra considérer un nombre complexe  $c$  tel que  $\left| \int_a^b \phi \right| = c \int_a^b \phi$ .

2. Vérifier que la relation définie sur les chemins paramétrés par  $\gamma_1 \equiv \gamma_2$  s'il existe  $\alpha : J \rightarrow I$  dérivable à dérivée continue et partout strictement positive telle que  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$  est une relation d'équivalence.
3. Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\gamma_1 : I \rightarrow D$  une application dérivable. Donner un exemple d'une application bijective dérivable  $\alpha : J \rightarrow I$  avec  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  tel qu'en posant  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$  on ait :

$$\int_I f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \neq \int_J f(\gamma_2(\tau))\gamma_2'(\tau)d\tau.$$

4. Donner un exemple d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et de deux chemins  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  de même origine et fin, tels que

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz \neq \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

5. Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue,  $\Gamma$  un chemin dans  $D$ . A-t-on

$$\operatorname{Re} \left( \int_{\Gamma} f(z)dz \right) = \int_{\Gamma} \operatorname{Re}(f(z))dz?$$

**Exercice 5** (Calcul d'intégrales).

On paramètre le cercle  $C_r$  de centre 0 et de rayon  $r > 0$  du plan complexe, orienté dans le sens trigonométrique en définissant pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\xi(t)$  comme le point d'intersection de la droite d'équation  $y = t(x + r)$  avec le cercle  $C_r$  différent de  $-r$ .

1. Faire un dessin et montrer que  $\xi(t) = r \frac{1+it}{1-it}$ .
2. Vérifier que  $\xi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$ .
3. En déduire que

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

4. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$