UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions holomorphes (HOLO)

FEUILLE DE TD N°3
EXERCICES SUR LES PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS HOLOMORPHES

1. ETUDE D'APPLICATIONS HOLOMORPHES

Exercice 1 (conservation des angles)**.**

On considère l'application $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto z^2$.

1. Montrer que f conserve les angles.
2. Soit a un nombre réel non nul. Montrer que l'image de la droite d'équation $x = a$ est incluse dans la parabole d'équation $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$. Représenter cette parabole pour $a = 1$ et $a = 2$.
3. Soit b un nombre réel non nul. Déterminer une parabole contenant l'image de la droite d'équation $y = b$. Représenter cette parabole pour $b = 1$ et $b = 2$.
4. Vérifier l'orthogonalité aux points d'intersection des quatre paraboles.

Exercice 2 (conservation des angles)**.**

On considère l'application $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

1. Déterminer le lieu où f préserve les angles.
2. Montrer que si on note $r = |z|$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$, alors
$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\frac{x}{r} \text{ et } v = \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\frac{x}{r}.$$
puis
$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r + \frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r - \frac{1}{r})^2} = 1 \text{ et } \frac{u^2}{\frac{x^2}{r^2}} - \frac{v^2}{\frac{y^2}{r^2}} = 1.$$
3. Déterminer l'image par f des cercles de centre o et de rayon 1 et 2.
4. Déterminer l'image par f des segments radiaux $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t$ et $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}t$, quand t varie dans $]0, 1[$.
5. Montrer que f est surjective.
6. Montrer que l'image réciproque d'un point de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ est composée de deux points, l'un dans $\Delta^\times$ l'autre dans $\mathbb{C} \setminus \Delta$.
7. Montrer que f est une bijection holomorphe de $\Delta^\times$ sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

2. BIHOLOMORPHISMES

Exercice 3 (Transformations de Möbius)**.**

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $GL(2, \mathbb{C})$, on associe l'application (transformation de Möbius)

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ & z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

1. Vérifier que $f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$.
2. On choisit désormais la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Expliciter le biholomorphisme $h = f_C$ et son inverse h^{-1}.
3. Montrer que
$$1 - |h(z)|^2 = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}$$
$$Im(h^{-1}(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$
4. En déduire l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par h.

Exercice 4 (Biholomorphismes entre domaines)**.**

On rappelle que $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$ et

$$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, Im(z) = 0 \text{ et } Re(z) \leq 0\}.$$

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} q : & \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^- \\ & z & \longmapsto & -z^2 \end{array}$$
est holomorphe et bijective.
2. En déduire une application holomorphe et bijective de Δ sur $\mathbb{C}^-$.

Exercice 5 (Biholomorphismes de $\mathbb{H}$)**.**

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$, on associe l'application

$$\begin{array}{rccc} h_A : & \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ & z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

1. Montrer que h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.
2. Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe $A \in SL(2, \mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

3. Modes de convergence

Exercice 6 (Le cas très particulier des polynômes)**.**

Soit d un entier naturel. Montrer qu'une suite de polynômes $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ de degré au plus d converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ si et seulement si les $d+1$ suites de ses coefficients convergent, si et seulement s'il existe $d+1$ points c_i de $\mathbb{C}$ tels que les suites $(P_n(c_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 7 (Un exemple)**.**

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{z+n}$ converge de façon compacte sur $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3\cdots\}$.
2. La convergence est-elle normale ?

4. Séries entières

Exercice 8 (Calcul de rayon de convergence)**.**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum 2^{2n}z^{2n}$.
2. Déterminer la limite de $\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}$.

Exercice 9 (Opérations sur les rayons de convergence)**.**

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_n+b_n)z^n$ est supérieur à $\min(R_1,R_2)$ avec égalité si $R_2\neq R_1$.
2. Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_nb_n)z^n$ est supérieur à R_1R_2.

Exercice 10 (Estimations de reste)**.**

Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, et tout $z\in\Delta$,

$$\left|\exp(z)-\sum_0^N\frac{z^n}{n!}\right|\leq\frac{2}{(N+1)!}.$$

Exercice 11 (Dérivation)**.**

Montrer que pour tout entier naturel k et tout $z\in\Delta$,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}z^{n-k}.$$

5. Fonctions spéciales

Exercice 12 (trigonométrie hyperbolique)**.**

On définit $\cosh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sinh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Déterminer leur rayon de convergence.
2. Exprimer $\cosh$ et $\sinh$ à l'aide de la fonction exponentielle.
3. Démontrer les formules d'addition pour $\cosh(z+w)$ et $\sinh(z+w)$ pour z et w dans $\mathbb{C}$.
4. Démontrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)\\ \sin(x+iy) &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

Exercice 13 (exponentielle)**.**

1. Trouver la valeur minimale de $|f(z)|$ où $f(z) = e^{z^2}$ sur le disque unité.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $2i\sin(z) = e^{-iz}(e^{2iz} - 1)$. En déduire les zéros de la fonction sinus sur $\mathbb{C}$ et en particulier que la fonction sinus ne s'annule que pour des valeurs réelles.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes : $e^z = -5$; $\sin(z) = 2$.

Exercice 14 (Logarithme)**.**

On considère la branche principale du logarithme, toujours notée $\log$.

1. Calculer $\log(i)$.
2. Calculer i^i.
3. Démontrer que pour tout α et β fixés dans $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^-$,

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \text{ et } z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta.$$

4. En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions suivantes :
   a. $z \longmapsto z^{1/2}$
   b. $z \longmapsto (1-z)^{1/3}$.

   Déterminer leurs domaines de définition.