

**Fonctions holomorphes (HOLO)**

 FEUILLE DE TD N°2  
 EXERCICES SUR LA  $\mathbb{C}$ -DÉRIVABILITÉ

## 1. POUR APPRENDRE LE COURS

**Exercice 1** ( $\mathbb{C}$ -dérivabilité).

1. Écrire en termes de  $\varepsilon$  et  $\delta$  la définition de la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité d'une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  d'un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$  en un point  $a$  de  $D$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $a$  un point de  $\mathbb{C}$ . Déterminer une fonction  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que sur  $\mathbb{C}$ ,

$$z^n = a^n + (z - a)f_1(z).$$

En déduire que l'application  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^n$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$  et déterminer sa dérivée en  $a$ .

3. Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont deux applications d'un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont  $\mathbb{C}$ -dérivables en  $a$ , alors leur produit est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $a$ . Déterminer alors la dérivée du produit en  $a$  à l'aide des dérivées en  $a$  de  $f$  et de  $g$ .
4. Donner un exemple d'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continue mais nulle part  $\mathbb{C}$ -dérivable.

**Exercice 2** (Équations de Cauchy-Riemann).

1. Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $\mathbb{C}$ -dérivable en un point  $a$  de  $D$ . Énoncer les équations de Cauchy-Riemann.
2. Écrire les équations de Cauchy-Riemann pour l'application  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^3$ .
3. Donner l'exemple d'une application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  différentiable en tout point et qui ne vérifie en aucun point les équations de Cauchy-Riemann.

**Exercice 3** (Holomorphie).

1. Donner l'exemple d'une fonction holomorphe  $f$  sur  $\mathbb{C}$ .
2. Vérifier en calculant  $\Delta v$ , que sa partie imaginaire  $v$  est harmonique.

## 2. À L'AIDE DES ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN

**Exercice 4** (Un exemple).

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy \mapsto x^3y^2 + ix^2y^3$  et  $g = f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application réelle associée.

1. En quels points de  $\mathbb{R}^2$ ,  $g$  est-elle différentiable ?
2. En quels points de  $\mathbb{R}^2$ ,  $g$  vérifie-t-elle les équations de Cauchy-Riemann ?
3. En quels points de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  est-elle  $\mathbb{C}$ -dérivable ?
4. En quels points de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  est-elle holomorphe ?

**Exercice 5** (Exponentielle).

1. Reprendre l'exercice précédent pour la fonction  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy \mapsto e^x \cos y + ie^x \sin y$ .
2. Déterminer la dérivée de cette application, là où elle est  $\mathbb{C}$ -dérivable.
3. Démontrer ou réfuter : la fonction  $f(z) = \exp(\bar{z})$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 6 (Logarithme).**

On considère  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$  et l'application

$$\begin{aligned} \ell : D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\ell$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable sur  $D$ .
2. Déterminer sa dérivée sur  $D$ .

**Exercice 7 (En coordonnées polaires).**

Déterminer les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires.

## 3. FONCTIONS HOLOMORPHES

**Exercice 8 (Fonctions localement constantes).**

1. Montrer qu'une fonction holomorphe sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$  qui ne prend que des valeurs réelles est localement constante.
2. Que dire d'une fonction holomorphe sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  dont la partie réelle est constante ?
3. Que dire d'une fonction holomorphe  $f = u + iv$  sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  dont la conjuguée  $\bar{f} := u - iv$  est aussi holomorphe ?
4. Montrer qu'une fonction holomorphe qui ne prend que des valeurs de module 1 est localement constante. *On pourra montrer que  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$  puis que  $v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .*

**Exercice 9 (Fonctions harmoniques).**

1. Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  dont la partie réelle est  $u(x, y) = x^2 + y^2$ .
2. Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  dont la partie réelle est  $u(x, y) = x^2 - y^2$ .
3. Montrer, sans calculer son laplacien, que la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto 2xy$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 10 (Fonctions holomorphes).**

1. Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  dont la partie réelle est  $u(x, y) = e^{-y} \sin(x) - e^y \cos(x)$ .
2. Déterminer toutes les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  dont la partie réelle est  $u(x, y) = e^{-y} \sin(x) - e^y \cos(x)$ .

**Exercice 11 (Exemples). \***

Montrer qu'un polynôme  $P(z, \bar{z})$  est holomorphe si et seulement si aucun monôme ne contient le facteur  $\bar{z}$ .

**Exercice 12 (Polynômes harmoniques). \***

Soit  $u(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  un polynôme harmonique. Montrer que la fonction

$$p(z) := 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)$$

est holomorphe de partie réelle  $u$ .

**Exercice 13 (Laplacien).**

Soit une fonction holomorphe  $f$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Montrer que

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2 \quad ; \quad \Delta \ln(1 + |f|^2) = \frac{4|f'|^2}{(1 + |f|^2)^2}$$