UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Fonctions holomorphes (HOLO)**

FEUILLE DE TD N°1
EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES ET LA TOPOLOGIE DE $\mathbb{C}$

## 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

On rappelle qu'un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ s'identifie à l'ensemble des nombres complexes : le point $M$ de coordonnées $(a, b)$ est associé au nombre complexe $z = a + ib$. On dit alors que $M$ est le point *d'affixe* $z$. On rappelle qu'un nombre complexe $z = a + ib$ a une écriture polaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ où $r$ est le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de $z$ et $\theta$ un *argument de* $z$, c'est à dire une mesure modulo $2\pi$ de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}})$ où $M$ est le point d'affixe $z$.

**Exercice 1** (Parties réelles et imaginaires)**.**

1. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de l'inverse de $z$.
2. Soit $t$ un nombre réel et $z = a + ib$ un nombre complexe. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z-t}{z+t}$.
3. Soit $z$ un nombre complexe. Démontrer que $z$ est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

**Exercice 2** (Modules)**.**

1. Soit $z$ et $w$ deux nombres complexes. Démontrer que
$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ |z+w|^2 + |z-w|^2 &= 2(|z|^2 + |w|^2) \\ |z+w| &\leq |z| + |w| \\ ||z| - |w|| &\leq |z-w|. \end{aligned}$$
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de la distance définie par
$$d(z, w) := |w - z|$$
est un espace métrique, c'est à dire que pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$,
   (a) $d(x, y) \geq 0$
   (b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
   (c) $d(y, x) = d(x, y)$
   (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

**Exercice 3** (Arguments)**.**

1. Soit $\theta$ et $\theta'$ deux nombres réels. En utilisant les formules d'addition pour le calcul de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$, montrer que
$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$
2. Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Déterminer $\arg(zz')$ en fonction de $\arg(z)$ et $\arg(z')$.
3. En déduire l'écriture polaire de $z^n$, puis ses parties réelles et imaginaires.
4. Déterminer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

**Exercice 4** (Racines)**.**

1. Déterminer les racines carrées et les racines cubiques de $i$.
2. Déterminer les racines cubiques de 1.
3. Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3}+3i$.
4. Résoudre les équations $z^2+2z-2+4i=0$ et $z^6-z^3+1=0$.

## 2. TOPOLOGIE

Dans l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$, si $z$ est un nombre complexe et $\varepsilon$ un nombre réel positif, on notera $B(z,\varepsilon)$, la boule de centre $z$ et de rayon $\varepsilon$, c'est à dire

$$B(z,\varepsilon) := \{w \in \mathbb{C}, d(z,w) < \varepsilon\}.$$

Un sous-ensemble $U$ de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ est dit *ouvert* si pour tout point $u$ de $U$ il existe un réel stritement positif $\varepsilon$ tel que la boule $B(u,\varepsilon)$ soit complètement incluse dans $U$.

Un sous-ensemble $F$ de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert.

*L'intérieur* $\mathring{A}$ d'une partie $A$ de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$, ou encore la réunion de tous les ouverts contenus dans $A$.

*L'adhérence* $\overline{A}$ d'une partie $A$ de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ est le plus petit fermé contenant $A$, ou encore l'intersection de tous les fermés contenant $A$.

*Le bord* $\partial A$ d'une partie $A$ de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ est $\partial A := \overline{A} - \mathring{A}$.

Une partie ouverte $A$ de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ est dite *connexe* si elle ne peut pas s'écrire comme réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints.

**Exercice 5** (Intérieur, adhérence)**.**

Soit $A$ une partie de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ |)$ et $z$ un nombre complexe.

1. Montrer que $z$ appartient $\mathring{A}$ si et seulement si il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon)$ soit incluse dans $A$.
2. Montrer que $z$ appartient à $\overline{A}$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, la boule $B(z,\varepsilon)$ rencontre $A$.

**Exercice 6** (Connexité)**.**

Le but de cet exercice est de montrer qu'une partie $P$ ouverte de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement si pour tout couple $(a,b)$ de points de $P$ il existe une ligne polygonale incluse dans $P$ qui joint $a$ et $b$.

1. On suppose d'abord que pour tout couple $(a,b)$ de points de $P$ il existe une ligne polygonale incluse dans $P$ qui joint $a$ et $b$. Supposons que $P$ n'est pas connexe. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints $A$ et $B$ tels que $P = A \cup B$, un point $a$ de $A$, un point $b$ de $B$ tel que le segment $[a,b]$ soit inclus dans $P$.
2. Noter
$$\begin{array}{rcl} \alpha & := & \{t \in [0,1] \mid ta + (1-t)b \in A\} \\ \beta & := & \{t \in [0,1] \mid ta + (1-t)b \in B\} \end{array}$$
Montrer que $\alpha$ et $\beta$ sont non vides ouverts et disjoints et utiliser la connexité de $[0,1]$ pour obtenir une contradiction.
3. On suppose réciproquement que $P$ est connexe et on fixe un point $o$ de $P$. On considère
$$A := \{b \in P \text{ il y a une ligne polygonale incluse dans } P \text{ qui joint } o \text{ et } b.\}.$$
Montrer que $A$ est ouvert dans $P$, en montrant que pour tout point $b$ de $A$, il existe une boule $B(b,\varepsilon)$ incluse dans $A$.
4. Avec les notations précédentes, montrer que $P \setminus A$ est ouvert dans $P$, en montrant que pour tout point $z$ de $P \setminus A$ et toute boule $B(z,\varepsilon)$ incluse dans $P$, $B(z,\varepsilon)$ est incluse dans $P \setminus A$.
5. Conclure.