Corrigé du CC2

Question de Cours

1. Voir le cours.
2. Voir le cours, Chap II.2.2. Proposition (Un calcul fondamental). Il est essentiel de savoir refaire ce calcul. On pouvait faire ce calcul avec des gros théorèmes, c'est correct d'un point de vue examen, mais ce n'est pas très satisfaisant.
3.

$$\int_{\partial\mathbb{D}(2i,1)} \frac{\sin(z)}{(z-5)^3}dz = 0, \qquad\qquad \int_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \frac{\sin(z)}{z-i}dz = 2\pi i\sin(i) = \pi(e^{-1}-e).$$

La première égalité vient du théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés et utilise le fait que $5 \notin \mathbb{D}(2i,1)$. La seconde vient de la formule de Cauchy pour les disques et utilise que $i \in \mathbb{D}(0,3)$.

Il est important d'écrire noir sur blanc que les hypothèses des théorèmes qu'on applique sont vérifiées. Par exemple, pour la première égalité, il faut donner un ouvert étoilé qui contient $\overline{\mathbb{D}}(2i,1)$ et qui ne contient pas 5, par exemple $\mathbb{D}(2i,2)$...

Exo 1

1. Dessin d'une parabole.
2. On peut paramétrer l'arc de parabole par $t \in [1,2] \to (t,t^2) = t + it^2$
3.On a $\gamma(t) = t + it^2$ donc $\gamma'(t) = 1 + 2it$ et $\bar{\gamma}(t) = t - it^2$ donc

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_1^2 (t-it^2)(1+2it)\,dt = \int_1^2 (2t^3-it^2+2it^2+t)\,dt = \left[\frac{t^4}{2} + i\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{8}{3} - i\frac{1}{3} + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 9 + i\frac{7}{3}$$

Exo 2

1.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

donc

$$|\sin z| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{Re(iz)} + e^{Re(-iz)}}{2} = \frac{e^{-Imz} + e^{Im(z)}}{2} \leq e^{|Im(z)|}$$

2. L'inégalité max longueur et la majoration ci-dessus donennt

$$\left|\int_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \frac{\sin z}{z^2+1}dz\right| \leqslant \left\|\frac{\sin(z)}{z^2+1}\right\|_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \mathrm{long}(\partial\mathbb{D}(0,3)) \leqslant \frac{e^3}{3^2-1} \times 6\pi = \frac{3e^3\pi}{8}$$

On ferra attention à l'erreur suivante : On a pas :

$$\cancel{\left|\int_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \frac{\sin z}{z^2+1}dz\right| \leqslant \int_{\partial\mathbb{D}(0,3)} \frac{e^{|Im(z)|}}{|z^2+1|}dz}$$

Pour la bonne et simple raison que le membre de droite est un nombre complexe, à priori non réel !

On n'oublie jamais le mantra : "Pour majorer une fraction (de termes positifs), on majore le numérateur et on minore le dénominateur."

On n'oublie jamais que l'outil de base pour majorer c'est : la première inégalité triangulaire ! et l'outil de base pour minorer, c'est la seconde IT !

Ainsi, la première IT donne :

$$|z^2+1| \leqslant |z^2| + 1$$

La seconde IT donne :

$$|z^2+1| \geqslant |z^2| - 1$$

Dans 90% des situations, on majore les modules de fractions, en utilisant brutalement la première IT au numérateur et la seconde IT au dénominateur.

Exo 3

1. On écrit
$$h(z)=\frac{(-z+1)(\bar z+1)}{|z+1|^2}=\frac{1-|z|^2-2i\operatorname{Im}(z)}{|z+1|^2}$$
de sorte que
$$\operatorname{Re}h(z)=\frac{1-|z|^2}{|z+1|^2}$$
2. Si $z\in\mathbb{D}$ par définition, $|z|<1$ donc $1-|z|^2>0$ donc $\operatorname{Re}h(z)>0$. Soit encore $h(\mathbb{D})\subset\Pi^+$
3. h est une transformation de Moebius, c'est donc un biholomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ dans lui-même qui envoie -1 sur ∞ et ∞ sur -1 donc $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$. Son inverse se calcule par exemple en écrivant $y=h(z)$ donc $y(z+1)=-z+1$ donc $z(y+1)=1-y$ donc $z=h(y)$. Autrement dit $h^{-1}=h$.
4. Comme h est bijective de $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ dans lui-même on déduit de la question 1 que pour tout $w\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, si $z=h(w)=h^{-1}(w)$, on a
$$\operatorname{Re}w=\frac{1-|h^{-1}(w)|^2}{|h^{-1}(w)+1|^2}$$
En particulier, si $\operatorname{Re}w>0$, alors $1-|h(w)|^2>0$ donc $h(w)\in\mathbb{D}$ donc $h^{-1}(\Pi^+)\subset\mathbb{D}$
5. D'aprés les questions 2 et 4, $h(\mathbb{D})\subset\Pi^+$ et $\Pi^+=h(h^{-1}(\Pi^+))\subset h(\mathbb{D})$ Donc $h(\mathbb{D})=\Pi^+$. De plus $h=h^{-1}$ est holomorphe. D'où le résultat.

Exo 4

1.La fonction f'/f est bien définie et holomorphe sur Ω. Le théorème de Cauchy étoilé montre qu'il existe F holomorphe sur Ω tel que $F'=f'/f$. On considère la fonction auxiliaire, $g=fe^{-F}$, on vérifie facilement que $g'=0$. Quitte à bien à ajouter une constante à F, on peut supposer que $g=1$. La fonction F est bien la fonction recherchée.

2. L'ouvert $\mathscr{U}$ est étoilé par rapport à 0 puisqu'on a retiré des demi-droites dont la "partie fantôme" passe par 0. La fonction $f(z)=(z-a_1)\cdots(z-a_n)$ ne s'annulle pas sur $\mathscr{U}$ qui est étoilé, il existe donc F holomorphe sur $\mathscr{U}$ par la question 1., telle que $e^F=f$. On pose :
$$g(z)=e^{1/2F(z)}$$
Ainsi :
$$g^2(z)=e^{F(z)}=f(z).$$