Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques

2022-2023
Licence 3

Fonctions Holomorphes
Examen 5 mai 2023 durée 2 heures

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.

Questions de cours

6pts

Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats du cours utilisés doivent être cités avec soin.

1. Donner la définition d'une fonction holomorphe.

2. Énoncer le Théorème de Liouville.

3. Énoncer le théorème de l'application ouverte pour les fonctions holomorphes.

4. Rappeler les définitions des trois types de singularités isolées.

5. Est-ce que la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z}{|z|}$ est holomorphe ?

6. Montrer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est entière telle que $Re(f) \geq 0$, alors f est constante.

7. Notons $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$. Soit $f : \Delta^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe un $\varepsilon \in]0,1[$ tel que pour tout $z, 0 < |z| < \varepsilon$ on a $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{1/2}}$. Décrire le type de singularité de f en 0.

8. Considérons une application $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

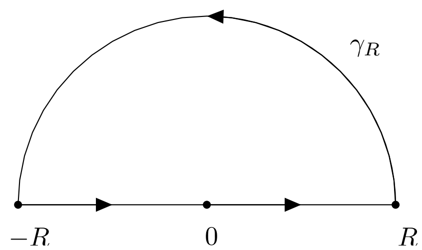
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(z) + b_k \sin^k(z)$$

où $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Supposons que $P(z) = 1$ pour tout $z \in [0,1]$. Montrer que $P(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1

4pts

Soit γ_R le contour défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamètre le segment $[-R, R]$, avec $R > 1$.



1. Calculer $I_R = \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$.
2. Rappeler pourquoi l'application $x \mapsto \frac{\cos x}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$.

Exercice 2

4pts

Soit $f(z) = \frac{1}{iz} \times \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2}}$.

1. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec deux pôles simples que l'on déterminera.
2. Calculer les résidus de f aux deux pôles.
3. Montrer que :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(\theta)} d\theta.$$

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(\theta)} d\theta$.

Exercice 3

6pts

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $\varphi(z) = az + b$. Montrer que φ est holomorphe et bijective.
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe et bijective. On pose $g(z) = f(1/z)$.
   (a) Montrer que 0 n'est pas une singularité effaçable de g.
   (b) Montrer que 0 n'est pas une singularité essentielle de g.
   (c) En déduire que 0 est un pôle de g et f est un polynôme.
   (d) En déduire l'existence d'un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $f(z) = az + b$.